Die von dem skizzierten Monopol von 0 bis h entlang der z-Achse mit einer Stromverteilung von $I(z)$ in der oberen Hemisphäre ($z > 0$) erzeugten Felder sind nach der Methode der Bildladungen identisch zu den Feldern, die ein Dipol von $-h$ bis h entlang der z-Achse mit einer symmetrisch fortgesetzten Stromverteilung $I(-z) = I(z)$ in der oberen Hemisphäre erzeugt.

Die Komponenten des Stromdichtevektors $\vec{j}(x, y, z, t)$ eines derartigen Dipols sind

$$
\begin{aligned}
j_x(x, y, z, t) &= 0 \\
j_y(x, y, z, t) &= 0 \\
j_z(x, y, z, t) &= \delta(x)\delta(y)I(z)\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

Die Berechnung der Felder erfolgt analog zu [1] (Appendix A). Eine allgemeine Einführung in die Thematik findet sich z.B. in [2].

Mit dem oben gegebenen Stromdichtevektor $\vec{j}(x, y, z, t)$ berechnen sich in der für $r \gg h$ gültigen ersten Ordnung die beiden Komponenten $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$ des Vektorpotentials [1] (13),(14) zu

$$\vec{A}_1(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} r\right) \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{A}_2(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei das Stromverteilungsintegral s durch

$$s = \int_{-h}^{h} I(z')dz'$$

gegeben ist. Das Verschwinden von $\vec{A}_2$ ist dabei eine direkte Konsequenz aus der Symmetrie der Stromverteilung zu $z = 0$. Damit ergibt sich das Vektorpotential in erster Ordnung gemäß [1] (12) zu:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} s \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} r\right) \end{pmatrix}$$

Aus der Lorentz-Eichung [1], [2]

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) = 0$$

ergibt sich daraus das skalare Potential $\Phi(\vec{r},t)$ zu

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 c^2 s}{4\pi\omega}\frac{z}{r^2}\left(\frac{\omega}{c}\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right) - \frac{1}{r}\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right)\right)$$

Aus dem Vektorpotential $\vec{A}$ und dem skalaren Potential Φ ergeben sich die Komponenten der magnetischen Flußdichte (B-Feld) und des elektrischen Feldes (E-Feld) gemäß [1] (8),(9) zu

$$\begin{aligned}
B_x(\vec{r},t) &= -\frac{\mu_0 s}{4\pi}\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r}\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right) + \frac{\omega}{c}\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right)\right)\cdot y \\
B_y(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0 s}{4\pi}\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r}\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right) + \frac{\omega}{c}\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right)\right)\cdot x \\
B_z(\vec{r},t) &= 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
E_x(\vec{r},t) &= -\frac{\mu_0 c^2 s}{4\pi\omega}\left(-\frac{3}{r^4}\frac{\omega}{c}\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right) + \left(\frac{3}{r^5} - \frac{1}{r^3}\frac{\omega^2}{c^2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right)\right)\cdot zx \\
E_y(\vec{r},t) &= -\frac{\mu_0 c^2 s}{4\pi\omega}\left(-\frac{3}{r^4}\frac{\omega}{c}\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right) + \left(\frac{3}{r^5} - \frac{1}{r^3}\frac{\omega^2}{c^2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right)\right)\cdot zy
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
E_z(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0 c^2 s}{4\pi\omega}\frac{1}{r^2}\Bigg(&\left(\frac{\omega}{c} - \frac{3z^2}{r^2}\frac{\omega}{c}\right)\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right) \\
&+ \left(r\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{3z^2}{r^3} - \frac{z^2}{r}\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{r}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right)\Bigg)
\end{aligned}$$

Nach Übergang zu Kugelkoordinaten gemäß

$$\begin{aligned}
x &= r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\
y &= r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\
z &= r\cos(\vartheta)
\end{aligned}$$

sowie der Einführung der reduzierten Wellenlänge $\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/2\pi$ und des dimensionslosen Abstandes r' der in Vielfachen der reduzierten Wellenlänge gemäß $r' = r/\lambda\!\!\!^{-}$ gemessen wird, ergibt sich unter Beachtung von $\omega/c = 1/\lambda\!\!\!^{-}$ schließlich

$$
\begin{aligned}
B_x &= -\frac{\mu_0 s}{4\pi\bar{\lambda}^2}\left(\frac{1}{r'^2}\sin(\omega t - r') + \frac{1}{r'}\cos(\omega t - r')\right)\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\\
B_y &= \frac{\mu_0 s}{4\pi\bar{\lambda}^2}\left(\frac{1}{r'^2}\sin(\omega t - r') + \frac{1}{r'}\cos(\omega t - r')\right)\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\\
B_z &= 0
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{\mu_0 c s}{4\pi\bar{\lambda}^2}\left(\frac{3}{r'^2}\sin(\omega t - r') - \left(\frac{3}{r'^3} - \frac{1}{r'}\right)\cos(\omega t - r')\right)\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\cos(\varphi)\\
E_y &= \frac{\mu_0 c s}{4\pi\bar{\lambda}^2}\left(\frac{3}{r'^2}\sin(\omega t - r') - \left(\frac{3}{r'^3} - \frac{1}{r'}\right)\cos(\omega t - r')\right)\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\sin(\varphi)
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
E_z = \frac{\mu_0 c s}{4\pi\bar{\lambda}^2}\Bigg(&\frac{1}{r'^2}\left(3\cos^2(\vartheta) - 1\right)\sin(\omega t - r')\\
&- \left(\frac{1}{r'}\sin^2(\vartheta) + \frac{1}{r'^3}\left(3\cos^2(\vartheta) - 1\right)\right)\cos(\omega t - r')\Bigg)
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie des Aufbaus um die z-Achse kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit die xz-Ebene mit $\varphi = 0$ betrachtet werden. Es ergibt sich sofort:

$$
\begin{aligned}
B_x &= 0\\
B_y &= \frac{\mu_0 s}{4\pi\bar{\lambda}^2}\left(\frac{1}{r'^2}\sin(\omega t - r') + \frac{1}{r'}\cos(\omega t - r')\right)\sin(\vartheta)\\
B_z &= 0
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{\mu_0 c s}{4\pi\bar{\lambda}^2}\left(\frac{3}{r'^2}\sin(\omega t - r') - \left(\frac{3}{r'^3} - \frac{1}{r'}\right)\cos(\omega t - r')\right)\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\\
E_y &= 0
\end{aligned}
$$

Die z-Komponente des E-Feldes E_z ist von φ unabhängig und ändert sich daher gegenüber dem letzen Ausdruck nicht. Im Spezialfall $\vartheta = 90°$ (Beobachter auf der x-Achse) vereinfacht sich dies weiter zu

$$
\begin{aligned}
B_x &= 0 \\
B_y &= \frac{\mu_0 s}{4\pi\lambda\!\!\!^{-}{}^2}\left(\frac{1}{r'^2}\sin(\omega t - r') + \frac{1}{r'}\cos(\omega t - r')\right) \\
B_z &= 0
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \\
E_y &= 0 \\
E_z &= \frac{\mu_0 c s}{4\pi\lambda\!\!\!^{-}{}^2}\left(-\frac{1}{r'^2}\sin(\omega t - r') - \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r'^3}\right)\cos(\omega t - r')\right)
\end{aligned}
$$

Literatur

[1] http://www.radiomuseum.org /forumdata/upload/am_looptransmitter_v1_rel.pdf

[2] Jürgen Schnakenberg, *Elektrodynamik, WILEY-VCH*, 2003