Entdämpfung und Trennschärfe von Rückgekoppelten Schwingkreisen

Dipl.-Phys. Jochen Bauer

25.6.2011

Zusammenfassung

In der historischen Radiotechnik ist zu Rückkopplungsempfängern immer wieder der Ausspruch “Mit der Rückkopplung wird der Kreis entdämpft und damit die Trennschärfe erhöht” zu hören und zu lesen. Die kritische Hinterfragung dieser Aussage ist auch Gegenstand eines Artikels auf der Website www.radiomuseum.org [4]. Darin wird diese Aussage sowohl experimentell, als auch mit Hilfe der Theorie der Regelungstechnik als irreführend bzw. falsch erkannt. Im vorliegenden Artikel soll dieser Sachverhalt nochmals aus einem anderen theoretischen Blickwinkel heraus mit Hilfe der Differentialgleichungen des gedämpften rückgekoppelten bzw. nicht rückgekoppelten Schwingkreises betrachtet werden.

Gedämpfter Schwingkreis ohne Rückkopplung

Wir gehen vom bekannten gedämpften Schwingkreis ohne Rückkopplung gemäß der Schaltung in Abbildung 1 aus.

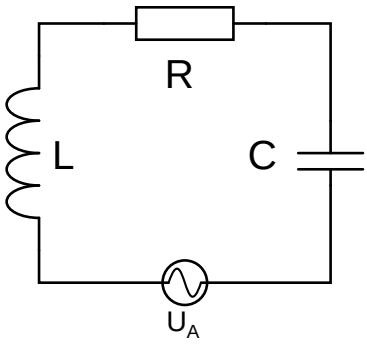

Bild 1: Gedämpfter Schwingkreis ohne Rückkopplung

Genau genommen handelt es sich dabei um eine Ersatzschaltung, bei der die Verluste in der Spule durch eine Reihenschaltung aus idealer Spule L und Ohmschem Verlustwiderstand R berücksichtigt sind [3]. Die Verluste im Kondensator sind bei den meistens verwendeten Luftdrehkondensatoren gegenüber den Spulenverlusten vernachlässigbar.

Gemäß der Schleifenregel addieren sich die Spannungen an der Spule L, dem Verlustwiderstand R und dem Kondensator C zur Generatorspannung U_A, die von der Antenne eingekoppelt wird. Die Aufstellung der Differentialgleichung für den Strom $I(t)$ im Schwingkreis ist damit mit den bekannten Grundgleichungen kein Problem und wird z.B. in [1] dargelegt. Die Herleitung wird hier kurz wiedergegeben:

$$U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = U_A(t) \tag{1}$$

Die Spannung U_L ergibt sich aus der zeitlichen Ableitung des magnetischen Fluß Φ der Spule multipliziert mit der Windungszahl n, also

$$U_L(t) = n\dot{\Phi}(t)$$

Wobei die Zeitableitung wie üblich durch einen Punkt über der Funktion gekennzeichnet wird. Das positive Vorzeichen kommt dadurch Zustande, dass U_L die im Verbraucherzählsystem gesehene Klemmenspannung der Spule ist [2]. Der magnetische Fluß Φ berechnet sich dabei aus Windungszahl n, Stromstärke I und Induktivität L der Spule zu [2]

$$\Phi(t) = \frac{LI(t)}{n}$$

und man erhält in Kombination dieser beiden Ausdrücke die bekannte Formel

$$U_L(t) = n\frac{d}{dt}\Phi(t) = n\frac{d}{dt}\frac{LI(t)}{n} = L\dot{I}(t)$$

Die Spannung am Verlustwiderstand R ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz zu:

$$U_R(t) = RI(t)$$

Die Spannung am Kondensator läßt sich aus der Kapazität C und der Ladung Q angeben:

$$U_C(t) = \frac{1}{C}Q(t)$$

Dies alles in (1) eingesetzt ergibt:

$$L\dot{I}(t) + RI(t) + \frac{1}{C}Q(t) = U_A(t)$$

Die Ableitung dieses Ausdruckes nach der Zeit unter Beachtung, dass $\dot{Q}(t) = I(t)$ ergibt die Differentialgleichung

$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \dot{U}_A(t) \tag{2}$$

für die Stromstärke $I(t)$ im Schwingkreis.

Gedämpfter Schwingkreis mit Rückkopplung

Wir gehen vom Schwingkreis aus dem obigen Abschnitt aus und fügen einen Rückkopplungsmechanismus mit Hilfe eines “Black Box” Bausteines gemäß Abbildung 2 hinzu.

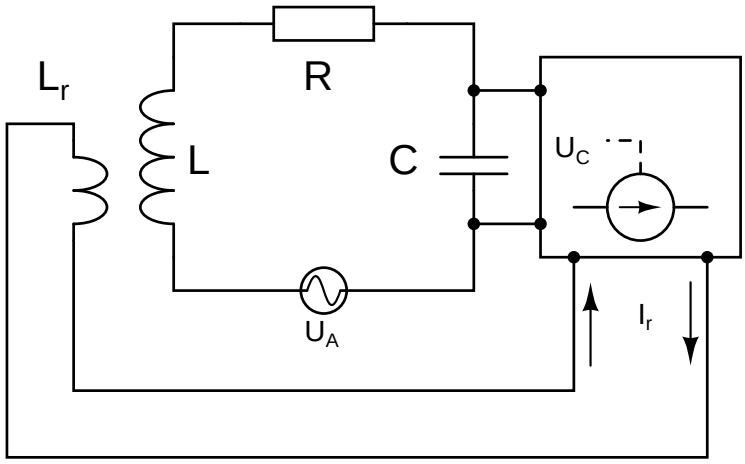

Bild 2: Gedämpfter Schwingkreis mit Rückkopplung

Dieser Rückkopplungsmechanismus besteht aus einer steuerbaren idealen Stromquelle, die den Strom $I_r(t)$ in die Rückkopplungsspule L_r einprägt. Die Rückkopplungsspule L_r und die Schwingkreisspule L sind induktiv gekoppelt. Die Steuerung des Stromes $I_r(t)$ erfolgt leistungslos über die Spannung $U_C(t)$ am Kondensator, die die Eingangsspannung dieses Bausteines darstellt, gemäß

$$I_r(t) = \beta U_C(t)$$

wobei β der Rückkopplungsfaktor ist. Das Vorzeichen von β bestimmt, ob die gesteuerte Stromquelle invertierend oder nicht-invertierend in Bezug auf das Vorzeichen der Eingangsspannung ist.

Durch die induktive Kopplung der Rückkopplungsspule und der Schwingkreisspule addiert sich zur der Klemmenspannung an der Schwingkreisspule aus dem vorherigen Abschnitt noch die Induktionsspannung U_i, die dadurch hervorgerufen wird, dass ein Teil des sich zeitlich ändernden magnetischen Flusses Φ_r der Rückkopplungsspule die Schwingkreisspule durchsetzt. Es ist damit:

$$\begin{aligned} U_L(t) &= n\dot{\Phi}(t) + U_i(t) = L\dot{I}(t) - kn\dot{\Phi}_r(t) \\ &= L\dot{I}(t) - kn\frac{d}{dt}\frac{L_r I_r(t)}{n_r} = L\dot{I}(t) - k\frac{n}{n_r}L_r\dot{I}_r(t) \end{aligned} \tag{3}$$

Dabei gibt die Konstante k mit $-1 \leq k \leq 1$ die Stärke und Richtung (gleichsinnig oder gegensinnig) der Kopplung zwischen Rückkopplungsspule und Schwingkreisspule an. Genau wie im nicht rückgekoppelten Schwingkreis addieren sich die Spannungen an der Spule L, dem Verlustwiderstand R und dem Kondensator C zur Generatorspannung U_A, die von der Antenne eingekoppelt wird gemäß

$$U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = U_A(t)$$

Der einzige Unterschied zum nicht rückgekoppelten Schwingkreis ist der, dass die Spannung U_L an der Spule nun durch (3) gegeben ist. Einsetzen von (3) und ableiten des resultierenden Ausdrucks nach der Zeit ergeben nun

$$L\ddot{I}(t) - k\frac{n}{n_r}L_r\ddot{I}_r(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \dot{U}_A(t) \tag{4}$$

Um an dieser Stelle weiterzukommen wird ein Ausdruck für die zweite Zeitableitung des Stroms in der Rückkopplungsspule $\ddot{I}_r(t)$ benötigt. Wir erinnern uns, daß die Rückkopplung mit $I_r(t) = \beta U_C(t)$ erfolgen soll. Damit ergibt sich

$$\ddot{I}_r(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\beta U_C(t)\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\beta\frac{1}{C}Q(t)\right) = \frac{\beta}{C}\dot{I}(t)$$

wobei wieder $\dot{Q}(t) = I(t)$ verwendet wurde. Setzt man dies nun in (4) ein, so erhält man die folgende Differentialgleichung für die Stromstärke $I(t)$ im rückgekoppelten Schwingkreis:

$$L\ddot{I}(t) - k\frac{n}{n_r}L_r\frac{\beta}{C}\dot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \dot{U}_A(t)$$

Dies läßt sich durch zusammenfassen der Vorfaktoren vor der ersten Zeitableitung des Stroms im Schwingkreis $\dot{I}(t)$ zu

$$L\ddot{I}(t) + \left(R - k\frac{n}{n_r}L_r\frac{\beta}{C}\right)\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \dot{U}_A(t) \tag{5}$$

umschreiben. Diese Differentialgleichung ist bis auf den Vorfaktor vor der ersten Zeitableitung des Stroms im Schwingkreis $\dot{I}(t)$ mit der Differentialgleichung des gedämpften Schwingkreises ohne Rückkopplung (2) identisch. Um die Rückkopplung mit einzubeziehen muss also einfach nur der Verlustwiderstand R durch

$$R - k\frac{n}{n_r}L_r\frac{\beta}{C} = \tilde{R} \tag{6}$$

ersetzt werden. Man könnte $\tilde{R}$ nun als effektiven Verlustwiderstand bezeichnen. Da die Bezeichnung "effektiv" in der Elektrotechnik aber meistens anderweitig Verwendung findet sei hier, um Mißverständnisse zu vermeiden, der Ausdruck "virtueller Verlustwiderstand" verwendet. Im Gegenzug dafür ist für R der Ausdruck "physikalischer Verlustwiderstand" sicher angemessen. Er wird ausschließlich durch das Verlustverhalten der Bauteile im Schwingkreis (und in daran angeschlossenen Baugruppen) bestimmt und kann durch Rückkopplung nicht verändert werden.

Die Gleichung (5) beschreibt sowohl Mitkopplung als auch Gegenkopplung. Ob Mit- oder Gegenkopplung stattfindet hängt erwartungsgemäß vom Vorzeichen des Produktes aus der Kopplungskonstanten k der Spulen und dem Rückkopplungsfaktor β ab. Ist $k\beta > 0$, so findet Mittkopplung statt und der virtuelle Verlustwiderstand $\tilde{R}$ ist kleiner als der physikalische Verlustwiderstand. Dies ist der normale Betriebsmodus bei Rückkopplungsempfängern.

Es wird nun klar, woher der bekannte Ausspruch "Durch Mittkopplung wird der Schwingkreis entdämpft" seinen Ursprung hat. Natürlich kann die Rückkopplung den physikalischen Verlustwiderstand des Schwingkreises nicht verändern. Dies wird in [4] auch richtig bemerkt. Aber: Durch die Rückkopplung ändert sich der virtuelle Verlustwiderstand. Dieser Teil des Ausspruches hat damit sicherlich seine Berechtigung, ist aber etwas irreführend. Es muss klar sein, dass er sich nicht auf den physikalischen Verlustwiderstand, sondern auf den virtuellen Verlustwiderstand bezieht.

Anders sieht es mit der Trennschärfe aus. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass der rückgekoppelte Schwingkreis mit einem virtuellen Verlustwiderstand von z.B. 1Ω, 10Ω, 100Ω, ... usw. sich bei der Messung der Resonanzkurve exakt genau so verhält wie ein nicht rückgekoppelter Schwingkreis mit einem physikalischen Verlustwiderstand von 1Ω, 10Ω, 100Ω, ... usw. Dies erklärt auch sofort, warum beim Rückkopplungsempfänger die Trennschärfe gegenüber einem Einkreis-Geradeausempfänger ohne Rückkopplung nicht besser sein kann. Der prinzipielle Verlauf der Resonanzkurven, insbesondere die Flankensteilheit, ist der selbe! Der Ausspruch "Durch Mittkopplung wird die Trennschärfe erhöht" ist damit, wie in [4] bemerkt und auch experimentell belegt, nicht haltbar.

Literatur

[1] Meyberg, Vachenauer, *Höhere Mathematik II S. 43, Springer*, 1991

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Selbstinduktion

[3] http://de.wikipedia.org/wiki/Schwingkreis

[4] Hans Knoll, Dietmar Rudolph, http://www.radiomuseum.org/forum/warum_kann_ein_radio_mit_einem_schwingkreis_sender_trennen.html