4.4 Reihenschaltung von R, L und C

Da sowohl die Spule als auch der Kondensator praktisch einen Verlustwiderstand besitzen, tritt in der Praxis bei der Reihenschaltung der Blindwiderstände auch ein Ohmscher Widerstand auf. ***Bild 90*** zeigt die Reihenschaltung von R, L und C. Über den Teilwiderständen fallen die entsprechenden Teilspannungen ab, die sich zur Gesamtspannung zusammensetzen.

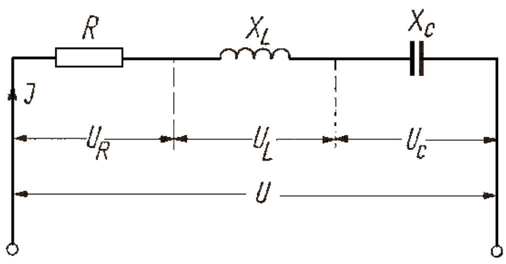
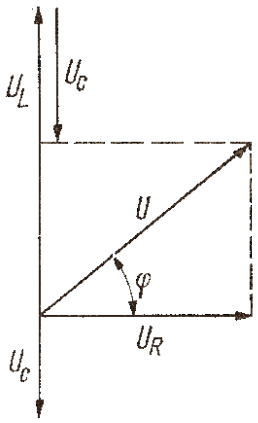


Bild 90
Reihenschaltung von Widerstand, Spule und Kondensator



Das Zeigerdiagramm der Spannungen wird in ***Bild 91*** wiedergegeben. Hierbei überwiegt die induktive Blindspannung, so daß auch der Phasenwinkel φ induktiv ist. Überwiegt die kapazitive Blindspannung, so wird der Phasenwinkel kapazitiv.

Bild 91
Zeigerdiagramm der Spannungen für eine Reihenschaltung von R, L und C

Der Scheinwiderstand Z der Reihenschaltung von R, L und C ist

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Für die Berechnung der Phasenverschiebung gilt

$$\tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Selbstverständlich kann man auch für die Widerstände ein Zeigerdiagramm aufstellen. ***Bild 92*** zeigt das Diagramm für die Reihenschaltung von R, L und C. Waagerecht liegt der Zeiger des Wirkwiderstandes R. Senkrecht dazu nach oben (+ 90°) der Zeiger des induktiven Blindwiderstandes X_L. In entgegengesetzter Richtung zu X_L wird der kapazitive Blindwiderstand X_C aufgetragen. Die verbleibende restliche Zeigerlänge stellt den noch wirksamen Blindwiderstand X dar.

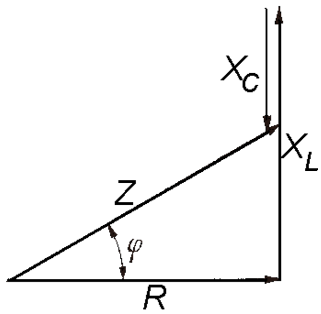


Bild 92 Zeigerdiagramm der Widerstände für eine Reihenschaltung von R, L und C

$$X = X_L — X_C$$

Je nach seiner Richtung ist er induktiv oder kapazitiv. Die Verbindung der freien Zeigerenden von X und R ergibt den Scheinwiderstand Z der Schaltung und den Phasenwinkel φ.

B e i s p i e l 104:

Eine Reihenschaltung von R=300 Ω, L = 0,5 H und C = 8 μF
liegt an einer Spannung U = 150 V mit der Frequenz f = 100 Hz.

a) Wie groß ist der Scheinwiderstand Z der Reihenschaltung?
b) Wie groß ist der Strom I durch die Reihenschaltung?

c) Wie groß sind die Teilspannungen über R, X_L und X_C?
d) Wieviel beträgt der Winkel φ der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung?
e) Wie sieht das Zeigerdiagramm der Widerstände aus?

a) $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

$X_L = 2\pi * f * L = 2 * 3{,}14 * 100 * 0{,}5 = 314\Omega$

$X_C = \frac{1}{2\pi * f * C} = \frac{1}{2 * 3{,}14 * 100 * 8 * 10^{-6}} =$

$= \frac{10^4}{52} \approx 200\Omega$

$Z = \sqrt{300^2 + (314 - 200)^2} = \sqrt{90000 + 13000}$

$Z = \sqrt{103000} = 321\Omega$

b) $I = \frac{U}{Z} = \frac{150}{321} = 0{,}467\ A$

c) $U_R = I * R = 0{,}467 * 300 = 140{,}1\ \text{V}$

$U_L = I * X_L = 0{,}467 * 314 = 147\ \text{V}$

$U_C = I * X_C = 0{,}467 * 200 = 93{,}4\ \text{V}$

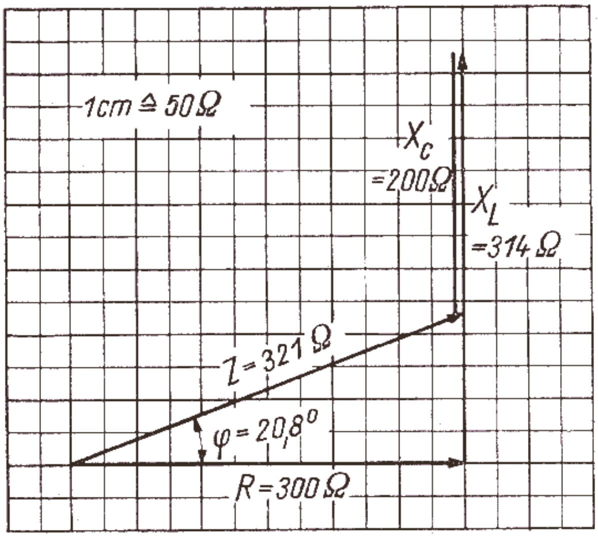
d) $\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{314 - 200}{300}$

$\tan\varphi = \frac{114}{300} = 0{,}381$

$\varphi = 20{,}8^0$

e) Siehe *Bild* 93

Bild 93
Zeigerdiagramm für Beispiel 104



Bei der Reihenschaltung einer Induktivität L und einer Kapazität C gibt es einen Sonderfall. Dieser Sonderfall tritt ein, wenn

$$\omega L = 1/\omega C \quad \text{oder} \quad X_L = X_C$$

ist. Dabei gilt $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2} = R$

und $\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{0}{R} = 0$

Demnach ist φ = 0°.

Eine solche Reihenschaltung wirkt also wie ein Wirkwiderstand, da keine Phasenverschiebung auftritt. Man nennt diesen Sonderfall Resonanz. Die Reihenschaltung nennt man *Reihenresonanz* oder *Spannungsresonanz*. Wie bereits bei der Behandlung der Blindwiderstände gezeigt wurde (Bild 74 und 76), nimmt der induktive Blindwiderstand mit steigender Frequenz zu, dagegen der kapazitive Blindwiderstand ab. Zeichnet man den

Verlauf beider Blindwiderstände in ein Diagramm, so wie es in ***Bild 94*** dargestellt ist, dann schneiden sich beide in einem Punkt, dem *Resonanzpunkt*. Diesen bezeichnet man auf der Frequenzachse als *Resonanzkreisfrequenz* ω_0 oder als *Resonanzfrequenz* f_0. Den Resonanzpunkt kann man erreichen, wenn man entweder die Frequenz oder die Größe eines der beiden Blindwiderstände variiert. Aus der Beziehung

$$X_L = X_C$$

läßt sich die Resonanzfrequenz für feststehende Werte von L und C bestimmen.

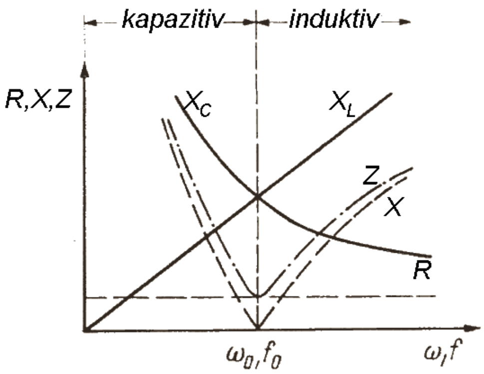


Bild 94
Frequenzabhängigkeit des Scheinwiderstandes Z eines Reihenresonanzkreises

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L * C}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L * C}} = \frac{1}{\sqrt{L * C}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi * \sqrt{L * C}}$$

f in Hz, L in H und C in F.
Diese Formel ist bekannt als die Thomsonsche Schwingungsformel.
Der Strom I durch die Reihenschaltung, den nur der Wirkwiderstand bestimmt, wird bei Resonanz groß.

$$I_0 = U/R$$

Die Blindspannungen können beträchtliche Werte erreichen, da

$$U_L = I_0 \bullet X_L \quad \text{und} \quad U_C = I_0 \bullet X_C$$

ist. Die Gesamtblindspannung beträgt allerdings null Volt, da beide Spannungen entgegengesetzt gerichtet sind. Aus ***Bild 94*** ist ebenfalls der Verlauf des Scheinwiderstandes Z und des Gesamtblindwiderstandes X ersichtlich. Bei der Resonanzfrequenz f_0 zeigen beide Kurven ein Minimum.

Beispiel 105:

Eine Reihenschaltung besteht aus einem Wirkwiderstand R = 4 Ω, einem induktiven Blindwiderstand X_L = 150 Ω und einem kapazitiven Blindwiderstand X_C = 150 Ω. An der Reihenschaltung liegt eine konstante Spannung U = 24 V. Wie groß ist die Blindspannung?

$$I_0 = U/R = 24/4 = 6\ \text{A}$$

$$U_L = U_C = I_0 \bullet X_L = I_0 \bullet X_C = 6 \bullet 150 = 900\ \text{V}$$

Die bei Resonanz auftretende Blindspannung ist also das 37,5fache der an der Reihenschaltung liegenden Spannung. Wie die Spulen- oder die Kondensatorgüte kann man auch die Kreisgüte für die Reihenschaltung berechnen. LC-Schaltungen bezeichnet man allgemein als *Schwingkreise*, bei der Reihenschaltung speziell *Reihenschwingkreis* oder *Serienschwingkreis*. Die Kreisgüte errechnet sich mit

$$\rho = \frac{\omega_0 * L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Da $R = U/I_0$ ist, wird $$\rho = \frac{I_0 * \omega_0 * L}{U}$$

Weil $I_0 * \omega_0 * L = U_L$ ergibt, kann man auch schreiben

$$\rho = U_L / U \quad \text{bzw.} \quad \rho = U_C / U \,;$$

$$U_L = U_C = \rho \cdot U.$$

Im Resonanzfall wird also die Blindspannung um den Faktor der Kreisgüte größer als die anliegende Klemmenspannung. Daher die Bezeichnung *Spannungsresonanz* beim Reihenschwingkreis. ***Bild 95*** zeigt den Stromverlauf eines Reihenschwingkreises. Eine solche Kurve bezeichnet man als Resonanzkurve. Die Resonanzeigenschaften eines Schwingkreises nutzt man vor allem in der Hochfrequenztechnik aus, um eine Wechselspannung bestimmter Frequenz auszusieben. Bekannt ist z. B. die Abstimmung eines Rundfunkempfängers auf eine bestimmte Resonanzfrequenz.

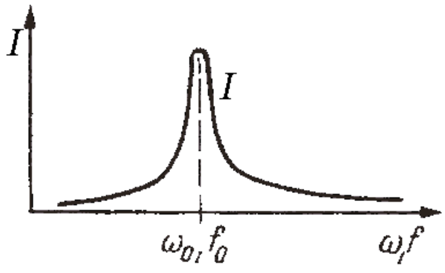


Bild 95
Frequenzabhängigkeit des Stromes I eines Reihenresonanzkreises

In der Praxis wendet man meist die Parallelresonanz an, über die bei der Parallelschaltung der Wechselstromwiderstände noch zu sprechen sein wird. Ausführlich werden die Resonanz und die Schwingkreise in den Grundlagen der Funktechnik behandelt.

Beispiel 106:

Gegeben ist die Reihenschaltung von einer Spule mit der Induktivität L = 0,2 mH, einem Kondensator mit der Kapazität C = 500 pF und einem Widerstand R = 8 Ω. Diese Reihenschaltung liegt an einer konstanten Spannung U = 4 V. Wie groß sind die Resonanzfrequenz f_0, der Resonanzstrom I_0 und die maximal auftretende Blindspannung U_L bzw. U_C?

$$f_0 = \frac{1}{2\pi * \sqrt{L * C}} = \frac{1}{6{,}28\sqrt{0{,}2 * 10^{-3}} * 500 * 10^{-12}}$$

$$f_0 = \frac{1}{6{,}28\sqrt{10 * 10^{-14}}} = \frac{10^7}{6{,}28 * 3{,}16} = \frac{10^7}{19{,}8}$$

$$f_0 = 505000\ Hz = 505\ kHz$$

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{4}{8} = 0{,}5\ A$$

$$X_L = X_C = I_0 * \omega_0 * L =$$

$$= 0{,}5 * 2 * 3{,}14 * 505 * 10^3 * 0{,}2 * 10^{-3}$$

$$X_L = 0{,}628 * 505 = 317\Omega$$

$$U_L = U_C = I_0 * X_L = 0{,}5 * 317 = 158{,}5\ V$$

Die Blindspannung ist also etwa 20mal größer als die am Reihenschwingkreis liegende Spannung!
