

Funktechnische Arbeitsblätter

Darstellung periodischer Funktionen durch Fouriersche Reihen

DK 517.5
Mth 31
 2. Ausgabe
 4 Blätter

A. Numerische Methode für empirisch gefundene Kurven

1. Allgemeines

Gegeben ist ein periodischer Kurvenverlauf. Die Periode ist 2π . Eine Periode wird in $2n$ Teile zerlegt, so daß ein Teil die Breite

$$\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}, \text{ d.h. } \frac{180^\circ}{n} \text{ im Winkelmaß hat. (Bild 1)}$$

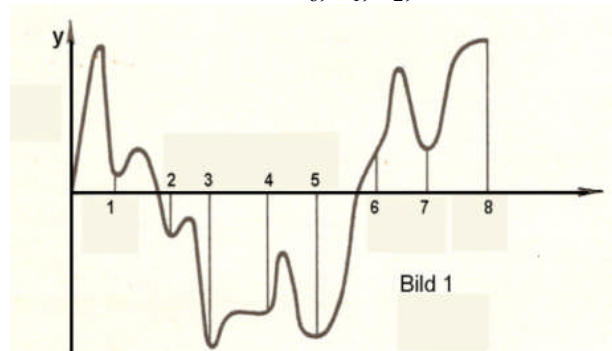
Bekannt sind also die Ordinaten oder Amplituden an den einzelnen Stellen x_0, x_1, x_2, \dots

Verlangt ist: eine Funktion zu bestimmen, deren Kurvenverlauf sich der gegebenen Kurve möglichst weit annähert.

Die Funktion soll von der allgemeinen Form sein:
 $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x \dots$ (1)
 $+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x \dots$

oder abgekürzt

$$f(x) = a_0 + \sum_{\lambda=1}^n a_\lambda \cos \lambda x + \sum_{\lambda=1}^n b_\lambda \sin \lambda x \quad (1a)$$



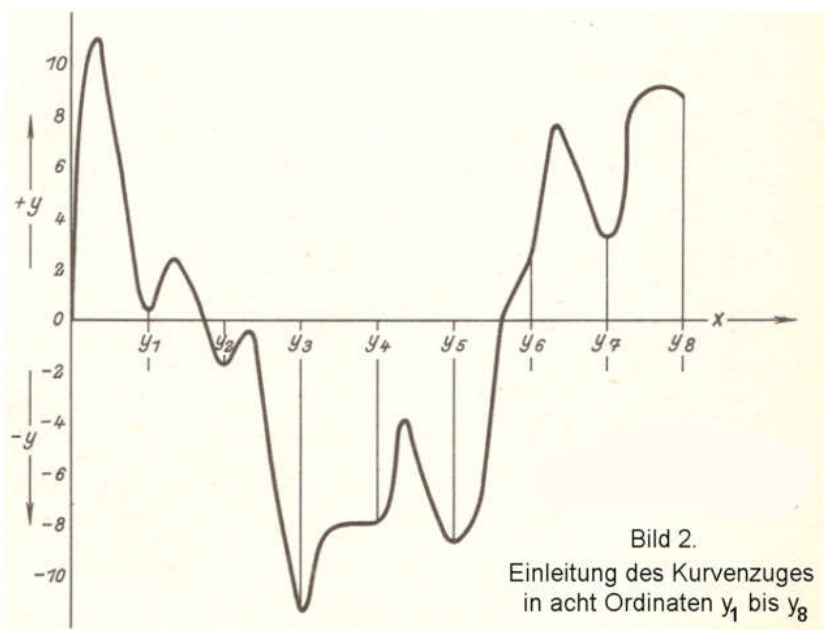
Die Aufgabe besteht also darin, die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$ zu bestimmen. Setzt man diese Koeffizienten in die Gleichung (1) ein, so soll der Kurvenverlauf der so gebildeten Funktion dem gegebenen Kurvenzug (**Bild 2**) möglichst getreu entsprechen.

Dieses Verfahren dient z. B. in der Tonfrequenztechnik und Elektroakustik dazu, um aus Oszillogrammen auf den Gehalt an Grundwelle und Oberwellen zu schließen und Klirrfaktoren zu ermitteln.

2. Die Koeffizientenbestimmung

Zahl der Teile, in die der Kurvenzug zerlegt wird
 An sich kann für n eine beliebige Zahl gesetzt werden; normalerweise verwendet man aber zur Rechnungsvereinfachung dafür eine durch 2 teilbare Zahl, meistens $n = 4$ oder 6 , also $2n = 8$ oder 12 .

Bei einer Teilung in acht Abschnitte liegen dann die Meßpunkte, bezogen auf die Grundwelle, bei $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ, 360^\circ$ und bei einer 12er-Teilung bei $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ, 360^\circ$. Es werden - mit



Rücksicht auf die praktische Bedeutung - nur diese zwei Einteilungen hier ausführlich behandelt. Zum Schluß werden die allgemeinen Formeln für eine beliebige Unterteilung angegeben (Abschnitt A 6).

3. Bestimmung der Koeffizienten bei Teilung in acht Abschnitte

Aus der Kurve oder Tabelle werden die acht Ordinaten $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$ und y_8 entnommen. Aus diesen bildet man folgende Summen und Differenzen:

Gegebene Ordinaten	— y_8	y_1 y_7	y_2 y_6	y_3 y_5	y_4 —
	$y_8 = s_0$	$y_1 + y_7 = s_1$	$y_2 + y_6 = s_2$	$y_3 + y_5 = s_3$	$y_4 = s_4$
	—	$y_1 - y_7 = d_1$	$y_2 - y_6 = d_2$	$y_3 - y_5 = d_3$	—

Daraus bildet man erneut folgende Summen und Differenzen

Errechnete Summen s	s_0 s_4	s_1 s_3	s_2 —
Summe	$s_0 + s_4 = \sigma_0$	$s_1 + s_3 = \sigma_1$	$s_2 = \sigma_2$
Differenz	$s_0 - s_4 = \delta_0$	$s_1 - s_3 = \delta_1$	—

Errechnete Differenzen d	d_1 d_3	d_2
Summe	$d_1 + d_3 = \sigma'_1$	$d_2 = \sigma'_2$
Differenz	$d_1 - d_3 = \delta'_1$	—

Aus diesen Summen (σ, σ') und Differenzen (δ, δ') berechnen sich die Koeffizienten nach folgenden Formeln:

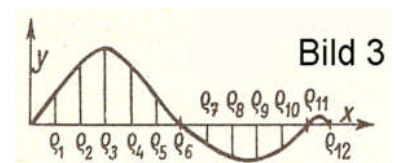
$$8a_0 = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 \quad 8a_4 = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2$$

$$4a_1 = \delta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2} * \delta_1 \quad 4b_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} * \sigma'_1 + \sigma'_2$$

$$4a_2 = \sigma_0 - \sigma_2 \quad 4b_2 = \delta'_1$$

$$4a_3 = \delta_0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} * \delta_1 \quad 4b_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2} * \sigma'_1 - \sigma'_2$$

Mit diesen so errechneten Werten wird die Funktion $f(x)$ gebildet:
 $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \cos 4x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x$



4. Bestimmung der Koeffizienten bei Teilung in zwölf Abschnitte

Wie in Abschnitt 3 werden aus den zwölf Ordinaten $y_1 \dots y_{12}$ folgende Summen und Differenzen gebildet:

Gegebene Ordinaten	— y_{12}	y_1 y_1	y_2 y_{10}	y_3 y_9	y_4 y_8	y_5 y_7	y_6 —
Summe	$y_{12} = s_0$	$y_1 + y_{11} = s_1$	$y_2 + y_{10} = s_2$	$y_3 + y_9 = s_3$	$y_4 + y_8 = s_4$	$y_5 + y_7 = s_5$	$y_6 = s_6$
Differenz	—	$y_1 - y_{11} = d_1$	$y_2 - y_{10} = d_2$	$y_3 - y_9 = d_3$	$y_4 - y_8 = d_4$	$y_5 - y_7 = d_5$	—

Zweite Summen- und Differenzbildung:

Errechnete Summen s	s_0 s_6	s_1 s_5	s_2 s_4	s_3
Summe	$s_0 + s_6 = \sigma_0$	$s_1 + s_5 = \sigma_1$	$s_2 + s_4 = \sigma_2$	$s_3 = \sigma_3$
Differenz	$s_0 - s_6 = \delta_0$	$s_1 - s_5 = \delta_1$	$s_2 - s_4 = \delta_2$	—

Errechnete Differenzen d	d_1 d_5	d_2 d_4	d_3
Summe	$d_1 + d_5 = \sigma'_1$	$d_2 + d_4 = \sigma'_2$	$d_3 = \sigma'_3$
Differenz	$d_1 - d_5 = \delta'_1$	$d_2 - d_4 = \delta'_2$	—

Aus diesen Summen (σ , σ') und Differenzen (δ , δ') berechnen sich die Koeffizienten nach folgenden Gleichungen:

$$12a_0 = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$6a_1 = \delta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{3} * \delta_1 + \frac{1}{2} * \delta_2$$

$$6a_2 = \sigma_0 + \frac{1}{2} * \sigma_1 - \frac{1}{2} * \sigma_2 - \sigma_3$$

$$6a_3 = \delta_0 - \delta_2$$

$$6a_4 = \sigma_0 - \frac{1}{2} * \sigma_1 - \frac{1}{2} * \sigma_2 + \sigma_3$$

$$6a_5 = \delta_0 - \frac{1}{2}\sqrt{3} * \delta_1 + \frac{1}{2} * \delta_2$$

$$12a_6 = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3$$

$$6b_1 = \sigma'_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} * \sigma'_2 + \frac{1}{2}\sigma'_3$$

$$6b_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} * \delta'_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} * \delta'_2$$

$$6b_3 = \frac{1}{2}\sigma'_1 - \frac{1}{2}\sigma'_3$$

$$6b_4 = \frac{1}{2}\sqrt{3} * \delta'_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} * \delta'_2$$

$$6b_5 = \sigma'_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} * \sigma'_2 + \frac{1}{2} * \sigma'_3$$

Mit diesen Koeffizienten wird die Funktion $f(x)$ gebildet:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \cos 4x + a_5 \cos 5x + a_6 \cos 6x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + b_5 \sin 5x$$

5. Zahlenbeispiel

Gegebene Ordinaten:

$$\begin{array}{ll} y_1 = 0,38 & y_5 = -8,58 \\ y_2 = -1,70 & y_6 = 2,42 \\ y_3 = -11,41 & y_7 = 3,21 \\ y_4 = -8,04 & y_8 = 8,76 \end{array}$$

Gegebene Ordinaten	—	y_1	y_2	y_3	y_4
	y_8	0,38	-1,70	-11,41	-8,04
	8,76	y_7	y_6	y_5	
		3,21	2,42	-8,58	
Summe	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
	8,76	3,59	0,72	-19,99	-8,04
Differenz	—	d_1	d_2	d_3	—
		-2,83	-4,12	-2,83	

Errechnete Summen	s_0	s_1	s_2	Errechnete Differenzen	d_1	d_2
s	8,76	3,59	0,72	d	-2,83	-4,12
	s_4	s_8			d_3	
	-8,04	-19,99			-2,83	
Summe	σ_0	σ_1	σ_2	Summe	σ'_1	σ'_2
	0,72	-16,4	0,72		-5,66	-4,12
Differenz	δ_0	δ_1	—	Differenz	δ'_1	—
	16,80	23,58			0	

Daraus berechnen sich die Koeffizienten:

$$8a_0 = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = 0,72 - 16,4 + 0,72 = -14,96$$

$$a_0 = -1,87$$

$$4a_1 = \delta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2} * \delta_1 = 16,80 + 0,707 * 23,58 = 33,47$$

$$a_1 = 8,37$$

$$4a_2 = \sigma_0 - \sigma_2 = 0,72 - 0,72 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$4a_3 = \delta_0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} * \delta_1 = 16,80 - 0,707 * 23,58 = 0,13$$

$$a_3 = 0,03$$

$$8a_4 = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 = 0,72 + 16,40 + 0,72 = 17,84$$

$$a_4 = 2,23$$

$$4b_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} * \sigma_1' + \sigma_2' = 0,707 * (-5,66) - 4,12 = -8,12$$

$$b_1 = -2,03$$

$$4b_2 = \delta_1' = 0$$

$$b_2 = 0$$

$$4b_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2} * \sigma_1' - \sigma_2' = 0,707 * (-5,66) + 4,12 = 0,12$$

$$b_3 = 0,03$$

Damit lautet die Funktion f(x):

$$f(x) = -1,87 + 8,37 \cos x + 0,03 \cos 3x + 2,23 \cos 4x - 2,03 \sin x + 0,03 \sin 3x$$

6. Allgemeine Formeln für die Koeffizienten

a) Der Koeffizient a_0

$$a_0 = \frac{1}{2n} * \sum_{\rho=1}^{2n} y_{\rho}$$

Mit ρ sind die einzelnen Teilpunkte auf der x-Achse bezeichnet. $2n$ ist die Anzahl aller Teilpunkte (in B i l d 3 also $2n = 12$). y_{ρ} sind die Amplituden an den einzelnen Teilpunkten ρ .

b) Die Koeffizienten a_{μ} (aber nicht für $\mu = n$), also $a_1, a_2, a_3 \dots$

$$a_{\mu} = \frac{1}{n} * \sum_{\rho=1}^{2n} y_{\rho} * \cos \mu x_{\rho}$$

Die Bedeutung von $n, 2n$ und y_{ρ} siehe unter a), für $\cos \mu x_{\rho}$ ist einzusetzen:

und zwar bei Berechnung von a_1 a_2 a_3
 $\cos 1 \cdot x_{\rho}$ $\cos 2 \cdot x_{\rho}$ $\cos 3 \cdot x_{\rho}$

Dabei läuft ρ von 1 ... 12 (nach obigem Beispiel), jedoch sind die einzelnen Abszissenwerte in dem zugehörigen Winkel einzusetzen.

$$\left(x_{\rho} = 180^{\circ} * \frac{\rho}{n} \right) \quad \text{Beispiel: 12er Teilung} \\ x_1 = 30^{\circ}, x_2 = 60^{\circ}, x_3 = 90^{\circ} \dots$$

Wir erhalten also für $\cos \mu, x_{\rho}$, und zwar bei Berechnung des Koeffizienten a_2 und einer 12er Teilung folgende Werte:

$$\cos 2 \cdot 30^{\circ}, \cos 2 \cdot 60^{\circ}, \cos 2 \cdot 90^{\circ}, \cos 2 \cdot 120^{\circ} \dots$$

c) Der Koeffizient a_n

Die Bedeutung von $n, 2n, \rho$ und y_{ρ} siehe unter a).

$$a_n = \frac{1}{2n} * \sum_{\rho=1}^{2n} y_{\rho} (-1)^{\rho}$$

d) Die Koeffizienten b_n

Die Bedeutung von $n, 2n, y_{\rho}$ siehe unter a). Die Glieder genau wie die Glieder $\cos \mu x_{\rho}$ berechnet. Bei Berechnung

$$b_n = \frac{1}{n} * \sum_{\rho=1}^{2n} y_{\rho} * \sin \mu x_{\rho} \quad \sin \mu x_{\rho} \text{ werden des Koeffizienten } b_1 \text{ und}$$

einer Teilung in acht Abschnitte erhalten wir folgende Werte für $\sin \mu x_{\rho}$:

$$\begin{array}{ll} \sin 1 \cdot x_1 = \sin 1 \cdot 45^{\circ} = \frac{1}{2} * \sqrt{2} & \sin 1 \cdot x_5 = \sin 1 \cdot 225^{\circ} = -\frac{1}{2} * \sqrt{2} \\ \sin 1 \cdot x_2 = \sin 1 \cdot 90^{\circ} = 1 & \sin 1 \cdot x_6 = \sin 1 \cdot 270^{\circ} = -1 \\ \sin 1 \cdot x_3 = \sin 1 \cdot 135^{\circ} = \frac{1}{2} * \sqrt{2} & \sin 1 \cdot x_7 = \sin 1 \cdot 315^{\circ} = -\frac{1}{2} * \sqrt{2} \\ \sin 1 \cdot x_4 = \sin 1 \cdot 180^{\circ} = 0 & \sin 1 \cdot x_8 = \sin 1 \cdot 360^{\circ} = 0 \end{array}$$

B. Zerlegung gebräuchlicher Kurvenzüge

In vielen Fällen liegen nun in der Nachrichtentechnik aber auch Kurvenzüge vor, die sich noch relativ einfach analytisch darstellen lassen.

1. Beispiele:

Rechteckkurve

(tritt auf beim Multivibrator)

Sägezahnkurve

(tritt auf beim Kippgenerator)

Sinushalbwellen

(tritt auf bei Einweggleichrichtung)

Umgeklappte Sinusschwingung

(tritt auf bei Zweiweggleichrichtung)

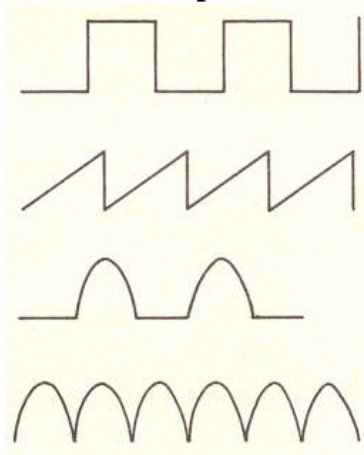


Bild 4 bis 7

Für diese und eine Reihe anderer ähnlicher Kurven braucht man die numerische Rechnung (Abschnitt A) nicht durchzuführen. Hier lassen sich aus vorliegenden Funktionen der Kurven die Koeffizienten der Fourierschen Reihe berechnen.

2. Regeln über die Koeffizienten

Generell kann man sich dazu folgendes merken: Ist die Funktion ungerade, das heißt ist $f(-x) = -f(x)$,

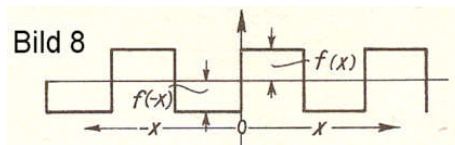


Bild 8

Beispiel:

dann enthält die Reihe nur \sin - Glieder. Ist die Funktion gerade, das heißt ist $f(-x) = f(x)$,

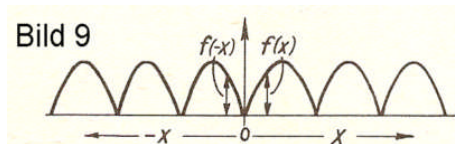


Bild 9

Beispiel:

dann enthält die Reihe keine \sin - Glieder. Hat die Kurve eine weitere Symmetrielinie

[z. B. $f(x) = f(\pi - x)$],

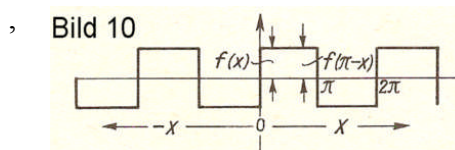


Bild 10

Beispiel:

fallen in der Fourier-Reihe, die nur aus \sin -Gliedern besteht, alle die fort, deren Argument ein geradzahliges Vielfaches von x ist. Es bleiben also nur $\sin x$, $\sin 3x$, $\sin 5x$ usw.

Oder zum Beispiel:

Hier fallen in der Reihe, in der die \sin -Glieder fehlen, alle die \cos -Glieder weg, deren Argument ein ungeradzahliges Vielfaches von x ist. Es bleiben übrig nur: d_0 , $\cos 2x$, $\cos 4x$, $\cos 6x$...

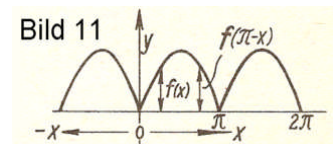


Bild 11

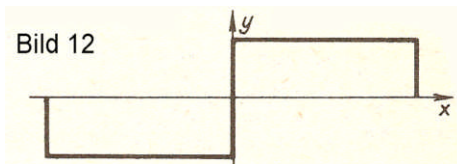
3. Grafisches Beispiel: Rechteckkurve

Addiert man an Hand der Reihe für eine Rechteckkurve die Grundwelle und die Oberwellen grafisch, sieht man ohne weiteres ein, daß die oben aufgezählten Gesetzmäßigkeiten über den Fortfall bestimmter Gliedergruppen ihre Berechtigung haben.

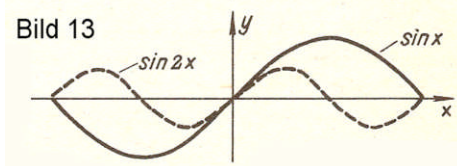
Formel für die Rechteckkurve (**Bild 12**):

$$f(x) = \frac{4h}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

a) Rechteckkurve

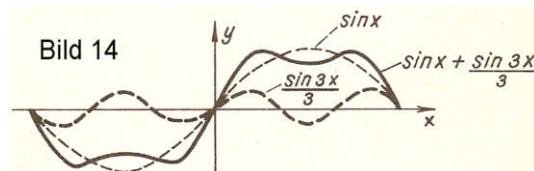
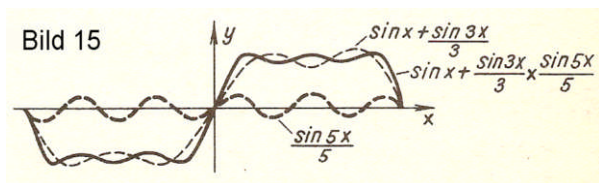


b) 1. Annäherung
sin x



cos x muß wegfallen, da er für $x = 0$ den Wert 1 hat, während ja die Funktion für $x = 0$ durch Null gehen soll. sin 2 x (in b gestrichelt eingezeichnet) muß wegfallen, da jede der beiden Halbwellen durch Summation von sin x und sin 2 x sehr unsymmetrisch würde.

c) 2. Annäherung $\sin x + \frac{\sin 3x}{3}$



d) 3. Annäherung $\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} \right) + \frac{\sin 5x}{5}$

4. Berechnung der Fourier-Reihe

Ein periodischer Schwingungsvorgang läßt sich gewöhnlich durch eine Summe von harmonischen Schwingungen (Grundwelle, Oberwellen und Gleichstromglied [$f = 0$]) ersetzen. Das heißt, die periodische Funktion $f(x)$ kann durch

$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x \dots$ dargestellt werden. Es ist also notwendig, die Koeffizienten dieser Reihe: $a_0, a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n$ zu bestimmen.

a) Euler-Fourier-Formeln zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

b) Darstellung der Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$$

Die Koeffizienten a_n können bestimmt werden durch:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

c) Beispiel für die Berechnung nach 4a, d. h. mit den Euler-Fourierschen Formeln.

Gegeben sei eine umgeklappte Sinusschwingung (**Bild 16**)

Für den Bereich $-\pi \dots 0$ ist $f(x) = -\sin x$

Für den Bereich $0 \dots \pi$ ist $f(x) = +\sin x$

Dann berechnet sich a_0 nach B 4a in folgender Weise

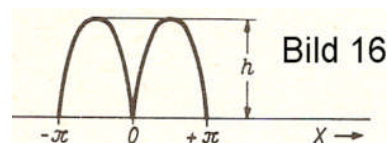
$$a_0 = \frac{h}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{h}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 -\sin x dx + \int_0^{\pi} \sin x dx \right\}$$

$$= \frac{h}{2\pi} \left\{ \cos x \Big|_{-\pi}^0 + [-\cos x] \Big|_0^{\pi} \right\}$$

$$= \frac{h}{2\pi} \{ 1 - (-1) + 1 - (-1) \}$$

$$= \frac{2}{2\pi} \cdot h$$



Entsprechend ergibt sich nach B 4a:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{h}{\delta} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \\
 &= \frac{h}{\delta} \left\{ \int_{-\pi}^0 -\sin x \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx \right\} \\
 &= \frac{h}{\delta} \left\{ \int_0^{-\pi} \sin x \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx \right\} \\
 &= \frac{h}{\delta} \left\{ \int_0^{-\pi} \frac{1}{2} \left[\sin(x-nx) \, dx + \frac{1}{2} \sin(x+nx) \right] dx + \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left[\sin(x-nx) \, dx + \frac{1}{2} \sin(x+nx) \right] dx \right\} \\
 &= \frac{h}{\delta} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{-\cos(1-n)x}{1-n} \right]_0^{-\pi} + \left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} \right]_0^{-\pi} + \left[\frac{-\cos(1-n)x}{1-n} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} \right]_0^{\pi} \right\}
 \end{aligned}$$

Da $\cos(-\pi) = \cos \pi$, kann vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{h}{2\delta} \left\{ 2 \left[\frac{-\cos(1-n)x}{1-n} \right]_0^{\pi} + 2 \left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} \right]_0^{\pi} \right\} \\
 a_n &= \frac{h}{\delta} \left\{ \left[\frac{-\cos(1-n)x}{1-n} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} \right]_0^{\pi} \right\}
 \end{aligned}$$

Daraus berechnen sich die a-Koeffizienten wie folgt:

a_1 entfällt nach **Bild 11**

$$a_2 = -\frac{4h}{3\pi}$$

a_3 entfällt nach **Bild 11**

$$a_4 = -\frac{4h}{3 \cdot 5 \pi}$$

Die b-Koeffizienten, d. h. die sin-Glieder, entfallen nach **Bild 9**. Deshalb lautet die Gleichung für $f(x)$

$$f(x) = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} \dots \right)$$

d) Beispiel für die Berechnung nach Abschnitt 4b, d.h. für die komplexe Schreibweise.

Gegeben seien nach **Bild 17** Halbwellenimpulse

Die Impulsfrequenz (Wiederholungsfrequenz) hat eine Periode von $x = 2\pi$, die die Impulsform selbst bestimmende Frequenz f_i hat eine kürzere Periode, und zwar gilt:

$$\begin{aligned}
 a \cdot 2\pi k &= \pi \\
 a \cdot 4\pi k &= 2\pi \quad a = 1/2k
 \end{aligned}$$

a gibt also an, um wie viel die Periode von f_i kürzer ist als die der Wiederholungsfrequenz.

Für $f(x)$ gilt also:

$$f(x) = h \cdot \cos x/2k$$

Kontrolle: Für $x = \pi k$

$$f(x) = \cos \pi k/2k = \cos \pi/2 = 0$$

wie laut Zeichnung **Bild 17** gefordert ist.

Für die Fouriersche Reihe ergibt sich dann:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \cdot e^{inx} \quad \text{und für} \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} \, dx \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi k}^{\pi k} h \cos \frac{x}{2k} \cdot e^{-inx} \, dx$$

Nach Mth 21/1a, Abschnitt C gilt:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

Damit wird:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{h}{4\pi} \int_{-\pi k}^{\pi k} \left(e^{ix\left(\frac{1}{2k}-n\right)} + e^{-ix\left(\frac{1}{2k}+n\right)} \right) dx \\ &= \frac{h}{4\pi} \left\{ \left[\frac{e^{ix\left(\frac{1}{2k}-n\right)}}{i\left(\frac{1}{2k}-n\right)} \right]_{-\pi k}^{\pi k} + \left[\frac{e^{-ix\left(\frac{1}{2k}+n\right)}}{-i\left(\frac{1}{2k}+n\right)} \right]_{-\pi k}^{\pi k} \right\} \\ &= \frac{h}{4\pi} \left\{ \frac{e^{i\pi k\left(\frac{1}{2k}-n\right)} - e^{-i\pi k\left(\frac{1}{2k}-n\right)}}{i\left(\frac{1}{2k}-n\right)} + \frac{e^{-i\pi k\left(\frac{1}{2k}+n\right)} - e^{i\pi k\left(\frac{1}{2k}+n\right)}}{-i\left(\frac{1}{2k}+n\right)} \right\} \\ &= \frac{h}{4\pi} \left\{ \frac{2i \sin \pi k\left(\frac{1}{2k}-n\right)}{i\left(\frac{1}{2k}-n\right)} + \frac{2i \sin \pi k\left(\frac{1}{2k}+n\right)}{i\left(\frac{1}{2k}+n\right)} \right\} \\ &= \frac{h}{2\pi} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi kn\right)}{\frac{1}{2k} - n} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi kn\right)}{\frac{1}{2k} + n} \right\} \\ a_n &= \frac{h}{2\pi} \left(\frac{\cos \pi kn}{\frac{1}{2k} - n} + \frac{\cos \pi kn}{\frac{1}{2k} + n} \right) \end{aligned}$$

Siehe Funktechnische Arbeitsblätter Mth 21/1

$$= \frac{h \cdot \cos \pi kn}{2\pi} \left(\frac{1}{\frac{k}{2} - n} + \frac{1}{\frac{k}{2} + n} \right)$$

$$a_n = \frac{h}{2\pi k} \cdot \frac{\cos \pi kn}{\frac{1}{4k^2} - n^2}$$

$$\text{und } a_0 = \frac{h}{2\pi k} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4k^2}} = \frac{2kh}{\pi}$$

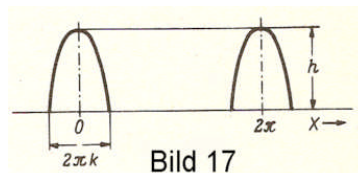


Bild 17

Die nebenstehende Gleichung (1) kann dann wie folgt geschrieben werden:

(1)

(2)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{h}{2\pi k} \cdot \frac{\cos \pi kn}{\frac{1}{4k^2} - n^2} e^{inx} + \frac{2kh}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h}{2\pi k} \cdot \frac{\cos \pi kn}{\frac{1}{4k^2} - n^2} \cdot e^{inx}$$

Gleichung (1) kann dann

d.h. die Summe von Gl. 1 wird in drei Summanden aufgelöst und zwar: a) $n = -\infty \dots -1$; b) $n = 0$; c) $n = +1 \dots +\infty$. Setzt man nun im ersten Summanden für n den Wert $-n$, dann erhält man für ihn Gleichung 3, wenn folgendes beachtet wird; läuft n von $-\infty$ bis -1 , dann geht $-n$ von ∞ bis 1 , oder, was das gleiche ist, von 1 bis ∞ . Der erste Summand von (2) lautet dann:

$$\sum_{+1}^{\infty} \frac{h}{2\pi k} \cdot \frac{\cos(-n)\pi k}{\frac{1}{4k^2} - (-n)^2} e^{i(-n)x} = \sum_{+1}^{\infty} \frac{h}{2\pi k} \cdot \frac{\cos \pi k n}{\frac{1}{4k^2} - n^2} \cdot e^{-inx} \quad (3)$$

Damit wird:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2kh}{\pi} + \frac{h}{2\pi k} \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\pi k}{\frac{1}{4k^2} - n^2} (e^{inx} + e^{-inx}) \\ &= \frac{2kh}{\pi} + \frac{h}{2\pi k} \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\pi k}{\frac{1}{4k^2} - n^2} \cdot 2 \cos nx \\ &= \frac{2kh}{\pi} + \frac{4kh}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\pi k}{1 - 4k^2 n^2} \cdot \cos nx \end{aligned}$$

5. Graphische Darstellung von Grund- und Oberwellen

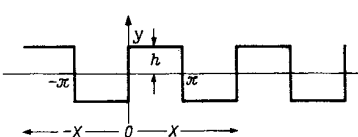
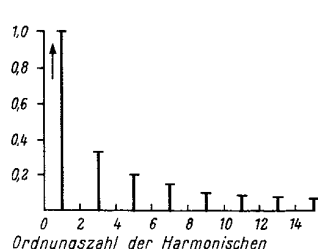
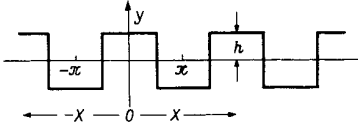
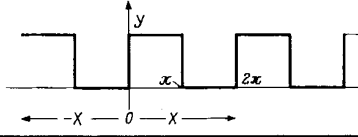
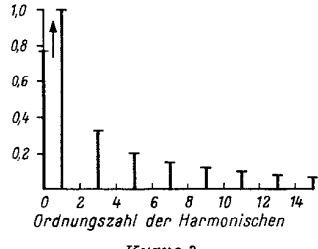
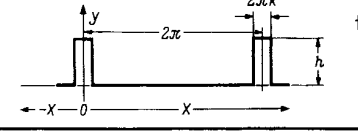
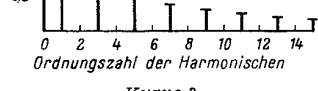
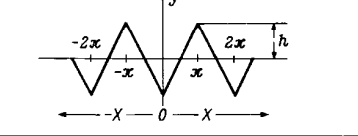
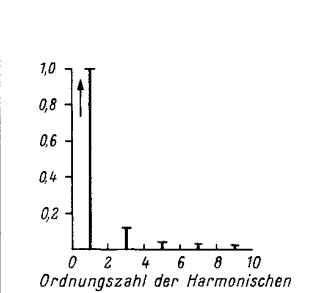
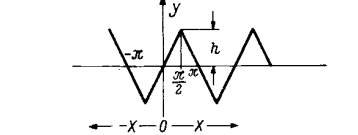
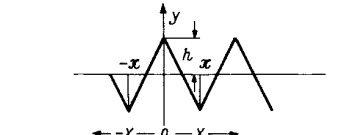
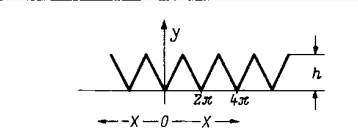
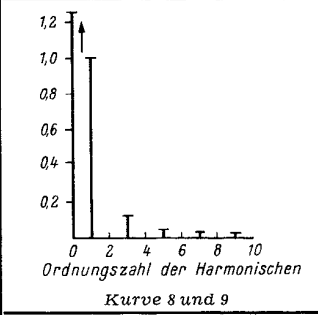
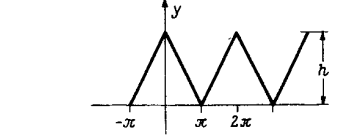
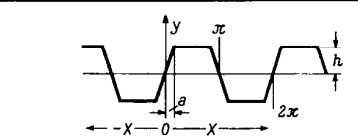
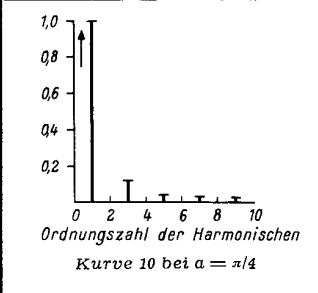
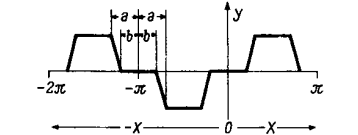
zwar ist das Auswerten der in Abschnitt C gegebenen Formeln nicht schwierig, aber manchmal zu zeitraubend. Außerdem genügt in vielen Fällen ein Überblick über den Verlauf der Amplitudenbegrenzungskurve, um beurteilen zu können, welche Oberwellen noch zu berücksichtigen sind bzw. von welcher Harmonischen ab die Oberwellenamplituden als uninteressant gelten können. Es ist deshalb in den rechten Spalten der auf Blatt 3a und 4 folgenden Formelzusammenstellung für die wichtigen Kurven über der Ordnungszahl der Harmonischen der zugehörige Amplitudenwert aufgetragen.

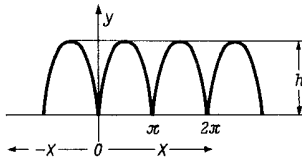
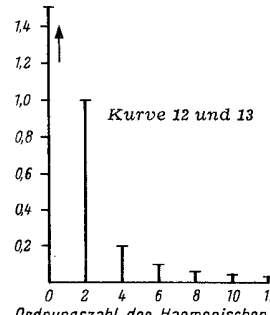
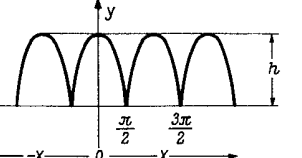
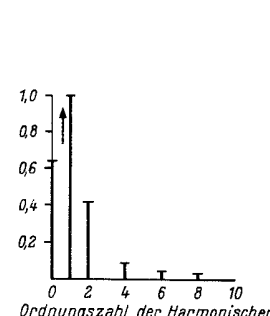
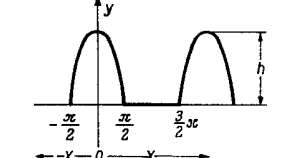
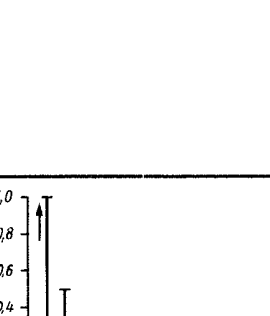
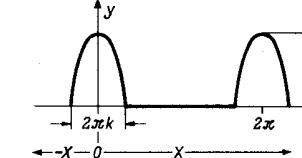
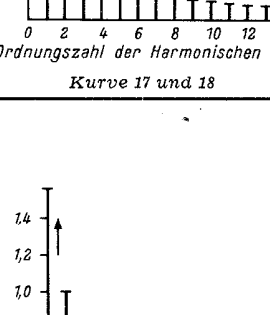
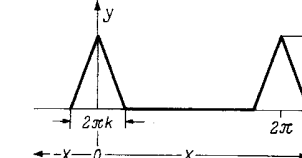
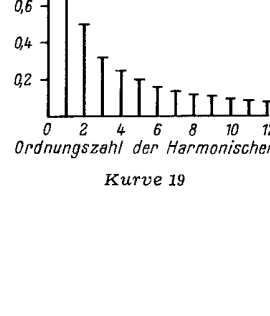
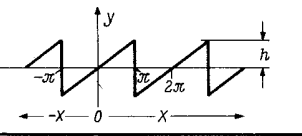
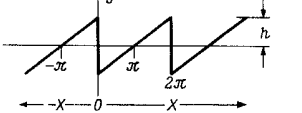
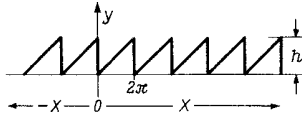
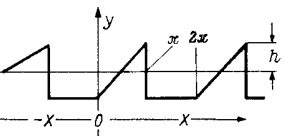
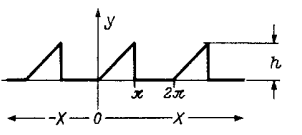
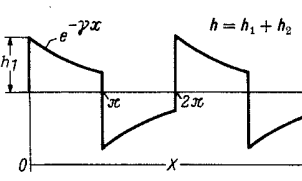
Bei den periodischen Funktionen zu den Kurven Nr. 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14 erfolgt die Abnahme sehr rasch. Da die kleinen Amplitudenwerte in der graphischen Darstellung schwer ablesbar sind, bringt die folgende Tabelle (Blatt 4a) die errechneten Amplitudenwerte.

Tabelle der Amplitudenwerte für die Kurven 5 bis 14

Ordnungszahl der Harmonischen	C ₅ , C ₆ , C ₇	C ₈ , C ₉	C ₁₀	C ₁₂ , C ₁₃	C ₁₄
f ₀	–	1,23	–	1,5	0,636
f ₁	1	1	1	–	1
f ₂	–	–	–	1	0,425
f ₃	0,111	0,111	0,111	–	–
f ₄	–	–	–	0,2	0,085
f ₅	0,04	0,04	0,04	–	–
f ₆	–	–	–	0,0855	0,0364
f ₇	0,0204	0,0204	0,0204	–	–
f ₈	–	–	–	0,0475	0,0202
f ₉	0,0124	0,0124	0,0124	–	–
f ₁₀	–	–	–	–	–
f ₁₁	0,00827	0,00827	0,00827	–	–
f ₁₂	–	–	–	0,021	0,0089

C. Formelzusammenstellung

Kurvenverlauf	Gleichung	Oberwellenaufbau
<p>1</p> 	$f(x) = \frac{4h}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} \dots \right)$	 <p style="text-align: center;">Kurve 1 und 2</p>
<p>2</p> 	$f(x) = \frac{4h}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 9x}{9} \dots \right)$	
<p>3</p> 	$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \dots \right)$	 <p style="text-align: center;">Kurve 3</p>
<p>4</p> 	$f(x) = h \left\{ k + \frac{2}{\pi} \left(\sin k\pi \cos x + \frac{1}{2} \sin 2k\pi \cdot \cos 2x + \frac{1}{3} \sin 3k\pi \cos 3x \dots \right) \right\}$	 <p style="text-align: center;">Kurve 3</p>
<p>5</p> 	$f(x) = -\frac{8h}{\pi^2} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$	 <p style="text-align: center;">Kurve 5, 6 und 7</p>
<p>6</p> 	$f(x) = \frac{8h}{\pi^2} \left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} \dots \right)$	
<p>7</p> 	$f(x) = \frac{8h}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$	
<p>8</p> 	$f(x) = \frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$	 <p style="text-align: center;">Kurve 8 und 9</p>
<p>9</p> 	$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{4h}{\pi^2} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$	
<p>10</p> 	$f(x) = \frac{4h}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin a}{1^2} \cdot \sin x + \frac{\sin 3a}{3^2} \cdot \sin 3x + \frac{\sin 5a}{5^2} \cdot \sin 5x \dots \right)$	 <p style="text-align: center;">Kurve 10 bei a = π/4</p>
<p>11</p> 	$f(x) = \frac{4h}{\pi(a-b)} \left(\frac{\sin a - \sin b}{1^2} \sin x + \frac{\sin 3a - \sin 3b}{3^2} \sin 3x + \frac{\sin 5a - \sin 5b}{5^2} \sin 5x \dots \right)$	

Kurvenverlauf	Gleichung	Oberwellenaufbau
<p>12</p> 	<p>Halbwellen von sin- und -sin- Schwingungen</p> $f(x) = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} \dots \right)$	 <p>Kurve 12 und 13</p>
<p>13</p> 	<p>Halbwellen von cos- und -cos- Schwingungen</p> $f(x) = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi} \left(-\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$	 <p>Kurve 14</p>
<p>14</p> 	<p>Halbwellen einer cos- Schwingung</p> $f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{h}{2} \cos x + \frac{2h}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} - \dots \right)$	 <p>Kurve 15</p>
<p>15</p> 	<p>Halbwellen einer cos- Schwingung</p> $f(x) = \frac{2kh}{\pi} + \frac{4kh}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi k}{1 - 4k^2 n^2} \cdot \cos nx$	 <p>Kurve 16 und 18</p>
<p>16</p> 	$f(x) = \frac{hk}{2} + \frac{2h}{\pi^2 k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi k}{n^2} \cdot \cos nx$	 <p>Kurve 17 und 19</p>
<p>17</p> 	$f(x) = \frac{2h}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} \dots \right)$	
<p>18</p> 	$f(x) = -\frac{2h}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x \dots \right)$	
<p>19</p> 	$f(x) = \frac{h}{2} - \frac{h}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \dots \right)$	
<p>20</p> 	$f(x) = -\frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right) + \frac{2h}{\pi} \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \dots \right)$	
<p>21</p> 	$f(x) = \frac{h}{4} - \frac{2h}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \frac{h}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \dots \right)$	
<p>22</p> 	$f(x) = \frac{2h\gamma}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1)x}{\gamma^2 + (2n+1)^2} + \frac{2h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) \sin (2n+1)x}{\gamma^2 + (2n+1)^2}$	

D. Anhang

Weiteres Beispiel für die Berechnung nach B4b, d.h. für die komplexe Schreibweise:
Gegeben seien nach **Bild 18** Dreieckimpulse.

Die Gleichung einer Geraden lautet: $y = ax + b$ (1)

Für die rechte Flanke des Dreiecks nach Bild 18 gilt:

$$y = h \quad \text{für } x = 0 \quad (2)$$

$$y = 0 \quad \text{für } x = \pi k \quad (3)$$

(2) und (3) nacheinander in (1) eingesetzt lassen a und b bestimmen:

$$y = h (1 - x/\pi k)$$

Entsprechend folgt für die linke Dreiecksflanke $y = h (1 + x/\pi k)$

Für die Fouriersche Reihe ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi k}^0 \left(1 + \frac{x}{\pi k}\right) e^{-inx} dx + \frac{h}{2\pi} \int_0^{\pi k} \left(1 - \frac{x}{\pi k}\right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi k}^{\pi k} e^{-inx} dx + \frac{h}{2\pi \cdot \pi k} \int_{-\pi k}^0 x \cdot e^{-inx} dx - \frac{h}{2\pi \cdot \pi k} \int_0^{\pi k} x \cdot e^{-inx} dx \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{h}{2\pi} \frac{-e^{-in\pi k} + e^{in\pi k}}{in} - \frac{h}{i2\pi^2 k} \frac{\delta}{\delta n} \int_{-\pi k}^0 e^{-inx} dx + \frac{h}{i2\pi^2 k} \frac{\delta}{\delta n} \int_0^{\pi k} e^{-inx} dx$$

$$= \frac{h}{\pi n} \cdot \sin n\pi k + \frac{h}{2\pi^2 ik} \frac{\delta}{\delta n} \left(\frac{1 - e^{-in\pi k}}{in} \right) - \frac{h}{2\pi^2 ik} \frac{\delta}{\delta n} \left(\frac{e^{-in\pi k} - 1}{in} \right)$$

$$= \frac{h}{\pi n} \cdot \sin n\pi k + \frac{h}{2\pi^2 ik} \frac{\delta}{\delta n} \left[\frac{1 - e^{-in\pi k}}{in} - \frac{e^{-in\pi k} - 1}{in} \right]$$

$$= \frac{h}{\pi n} \cdot \sin n\pi k + \frac{h}{2\pi^2 ik} \frac{\delta}{\delta n} \left(\frac{2 - 2 \cos n\pi k}{in} \right)$$

$$= \frac{h}{\pi n} \cdot \sin n\pi k + \frac{h}{\pi^2 k} \frac{\delta}{\delta n} \left(\frac{1 - 2 \cos n\pi k}{n} \right)$$

$$= \frac{h}{\pi n} \cdot \sin n\pi k - \frac{h}{\pi^2 k} \left[\frac{n\pi k \cdot \sin n\pi k - (1 - \cos n\pi k)}{n^2} \right]$$

$$= \frac{h}{\pi \cdot n} \cdot \sin n\pi k - \frac{h \cdot n\pi k \cdot \sin n\pi k}{\pi^2 k \cdot n^2} + \frac{h}{\pi^2 k} \cdot \frac{1 - \cos n\pi k}{n^2}$$

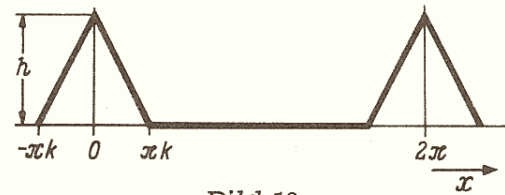


Bild 18

Für $\int x \cdot e^{-inx} dx$

kann geschrieben werden: $-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta n} \int e^{-inx} dx$

$$= \frac{h}{n^2 k} \cdot \frac{1 - \cos n\pi k}{n^2}$$

Setzt man zur Bestimmung von a_0 $n = 0$, so wird der Ausdruck $=0$. Man muß deshalb Zähler und Nenner nach n differenzieren.

$$a_0 = \frac{h \cdot \pi k \cdot \sin n\pi k}{\pi^2 k \cdot 2n}$$

Setzt man noch $\sin x = x$ (für kleine Argumente), so erhält man:

$$a_0 = \frac{h \cdot \pi k \cdot n\pi k}{\pi^2 k \cdot 2n} = \frac{h \cdot k}{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^1 \frac{h}{n^2 k} \cdot \frac{1 - \cos n\pi k}{n^2} \cdot e^{inx} + \frac{h \cdot k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h}{n^2 k} \cdot \frac{1 - \cos n\pi k}{n^2} \cdot e^{inx}$$

Setzt man im ersten Summanden (s. B 4d) für $n = -n$, so erhält man:

$$f(x) = \frac{h \cdot k}{2} + 2 \cdot \frac{h}{n^2 k} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi k}{n^2} \cdot \cos nx$$