

# Die Laplace-Transformation und ihre Anwendungen

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Die Laplace-Transformation</b>	<b>1</b>
1.1 Definitionsgleichungen der Laplace-Transformation . . . . .	1
1.1.1 Laplace-Transformierte der Sprung-Funktion . . . . .	2
1.2 Sätze der Laplace-Transformation . . . . .	2
1.3 Fourier — Laplace . . . . .	3
<b>2 Lösung von Differentialgleichungen</b>	<b>3</b>
2.1 Der RLC Tiefpaß als Beispiel . . . . .	4
2.1.1 Übertragungs-Funktion mit komplexer Rechnung . . . . .	4
2.1.2 Gewinnung der Differentialgleichung aus der Übertragungs-Funktion . . . . .	4
2.1.3 Gewinnung der Laplace-Transformierten aus der Differentialgleichung . . . . .	5
2.2 Sprung-Antwort des RLC Tiefpasses . . . . .	5
2.2.1 Spezialfall von Gleichung (2.13): Alle Anfangs-Bedingungen sind Null . . . . .	5
2.2.2 Bestimmung der Sprungantwort mit MATLAB . . . . .	6
2.3 Berücksichtigung der Anfangswerte . . . . .	6
2.3.1 Umrechnung der Anfangs-Werte der Speicher auf die Anfangs-Werte der Ausgangs-Größe . . . . .	6
2.3.2 RLC Tiefpaß mit Anfangs-Bedingungen und Sprung am Eingang . . . . .	7
<b>3 Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion</b>	<b>8</b>
3.1 Die Polstellen der Übertragungs-Funktion . . . . .	8
3.1.1 Polstellen in der rechten Halbebene bzw. auf der $\omega$ -Achse: Oszillator . . . . .	9
3.1.2 Polstellen-Gebirge des RLC-TP . . . . .	10
3.1.3 Bode-Diagramm des RLC-TP . . . . .	10
3.2 Der RC Spannungsteiler als Beispiel für Pol und Nullstelle . . . . .	11
3.2.1 Übertragungs-Funktion des RC-Spannungsteilers . . . . .	11
3.2.2 Pol-Nullstellen-Gebirge des RC-Spannungsteilers . . . . .	12
3.3 Bode-Diagramm des $PDT_1$ Systems . . . . .	12
3.3.1 Betrag des Bode-Diagramms . . . . .	13
3.3.2 Zeichnen des Betrags des Bode-Diagramms . . . . .	13
3.3.3 Bode-Diagramm in Betrag und Phase für Lead und Lag . . . . .	14
3.3.4 Realisierung von Lead und Lag mit Hilfe von Operationsverstärkern . . . . .	15
<b>4 Der RC-Teiler im Zeitbereich</b>	<b>15</b>
4.1 Anfangs-Wert und End-Wert . . . . .	16
4.1.1 Abgleich der Tastspitze beim Oszilloskop . . . . .	17
<b>5 Partialbruch Zerlegung</b>	<b>18</b>
<b>6 Tabellen zur Laplace-Transformation</b>	<b>19</b>

## Die Laplace-Transformation und ihre Anwendungen

Die Laplace-Transformation hat einige formale Ähnlichkeiten zur Fourier-Transformation, wie sich anhand der Definitionsgleichungen zeigt. Es bestehen aber auch einige Unterschiede, die so gewählt sind, daß mit Hilfe der Laplace-Transformation **lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten** bequem gelöst werden können.

Damit ist sie nützlich um z.B. **Einschwing-Vorgänge von Systemen** zu beschreiben. Die Theorie zur Laplace-Transformation wird daher auch nur soweit betrachtet, wie es für diesen Zweck erforderlich ist.

### 1 Die Laplace-Transformation

Zweck der Laplace-Transformation ist es hier, lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu lösen. Dafür wird die (einseitige) Laplace-Transformation mit folgenden Eigenschaften verwendet, die dieser Problemstellung angepaßt ist:

- Festlegen eines Anfangs-Zeitpunktes  $t = 0$ . Die Lösung gilt nur für  $t \geq 0$ .
- Berücksichtigung der Anfangs-Werte (z.B.  $f(0), f'(0), \dots, f^{(n)}(0)$ )
- Beschreibung der Reaktion des Systems mit Hilfe von abklingenden und aufklingenden Schwingungen

Diese Eigenschaften der Laplace-Transformation werden erreicht durch die geeignete Wahl

1. der Integral-Grenzen ( $0 \rightarrow \infty$  bzw.  $(c - j\infty) \rightarrow (c + j\infty)$ )
2. des Integral-Kerns  $\{e^{-st}\}$  mit einer „komplexen“ Frequenz<sup>1</sup>  $s$

$$s = \zeta + j\omega \quad (1.1)$$

wobei  $\zeta$  das Auf- bzw. Abklingen (einer Schwingung) beschreibt<sup>2</sup> und  $\omega = 2\pi f$  die Kreisfrequenz ist.

#### 1.1 Definitionsgleichungen der Laplace-Transformation

Die (einseitige) Laplace-Transformation  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  ist wie folgt definiert:

$$f(t) \cdot \sigma(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (1.2)$$

Aus der Bedingung  $t \geq 0$  ist erkennbar, daß die Zeitfunktionen, die einer Laplace-Transformation unterzogen werden, grundsätzlich bei  $t = 0$  erst beginnen bzw. dort „eingeschaltet“ werden. Dieses „Einschalten“ erfolgt durch die Multiplikation mit einer Sprung-Funktion  $\sigma(t)$ . Im Laplace-Integral ist dies dadurch berücksichtigt, daß die untere Grenze zu 0 angesetzt ist.

Die Laplace-Rück-Transformation  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  lautet:

$$F(s) \quad \bullet \longleftrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad \text{für } t \geq 0 \quad (1.3)$$

Der Integrations-Weg  $(c - j\infty)$  bis  $(c + j\infty)$  ist dabei so zu wählen, daß das Integral Gleichung (1.3) konvergiert. Dieses Integral wird hier nicht explizit berechnet. Statt dessen werden Laplace-Korrespondenz-Tabellen dafür benutzt.<sup>3</sup> Für die in der Laplace Tabelle (Seite 19) aufgelisteten Zeitfunktionen  $f(t)$  gilt  $f(t) \equiv 0$  für  $t < 0$ .

<sup>1</sup>Als Formelzeichen für die komplexe Frequenz ist neben  $s$  auch  $p$  üblich ( $p \equiv s$ ). Hier wird  $s$  verwendet.

<sup>2</sup>In der Literatur ist hierfür vielfach auch  $\sigma$  geschrieben. Um aber eine Verwechslung mit der Sprung-Funktion  $\sigma(t)$  auszuschließen, wird hier  $\zeta$  verwendet.

<sup>3</sup>Für die Behandlung von Einschwingvorgängen von LTI Systemen reicht das aus. Ansonsten ist bei Laplace-Integralen stets genau auf deren Konvergenz-Bereich zu achten.

### 1.1.1 Laplace-Transformierte der Sprung-Funktion

Definition der Sprungfunktion  $\sigma(t)$  für die Laplace-Transformation:<sup>4</sup>

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Mit Gleichung (1.2) wird für einen Sprung der Größe  $\hat{u}_e$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\hat{u}_e \sigma(t)\} &= \hat{u}_e \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-st} dt = \hat{u}_e \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \hat{u}_e \int_0^{\infty} e^{-st} dt \rightsquigarrow \\ \mathcal{L}\{\hat{u}_e \sigma(t)\} = U_e(s) &= \hat{u}_e \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{\hat{u}_e}{s} [-e^{-\infty} + e^0] = \frac{\hat{u}_e}{s} [-0 + 1] = \hat{u}_e \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Gleichung (1.5) gilt aber nur dann, wenn  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$  ist. Das wiederum erfordert, daß  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\zeta t} e^{-j\omega t} = 0$  ist, was nur für  $\Re\{s\} = \zeta > 0$  gilt (Konvergenzbereich).

Diese **Laplace-Korrespondenz** findet man unter Nr. 2 in der **Laplace-Tabelle** (Seite 19).

<b>Sprungfunktion = eingeschaltete Gleichgröße:</b> $\sigma(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s}$	(1.6)
--	-------

## 1.2 Sätze der Laplace-Transformation

Die Beweise zu den nachstehenden Sätzen ergeben sich unmittelbar durch Einsetzen in die Gleichungen (1.2) bzw. (1.3) und werden deshalb hier nicht gebracht.

Satz	Zeitbereich (Oberbereich)	$\circ \text{---} \bullet$	Bild-Bereich (Unterbereich)
	$f(t) \cdot \sigma(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$	$\circ \text{---} \bullet$	$F(s) = F(p)$
Linearität	$a \cdot f(t) + b \cdot g(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$a \cdot F(s) + b \cdot G(s)$
Differentiation	$\frac{d}{dt} f(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$s \cdot F(s) - f(0)$
	$\frac{d^2}{(dt)^2} f(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$s^2 \cdot F(s) - s f(0) - f'(0)$
	$\frac{d^n}{(dt)^n} f(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$s^n \cdot F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-1-k}$
	$t^n \cdot f(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$(-1)^n \frac{d^n}{(ds)^n} F(s)$
Ähnlichkeit	$f(at)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0$
Zeitverschiebung	$f(t - T) \cdot \sigma(t - T); \quad T > 0$	$\circ \text{---} \bullet$	$e^{-sT} \cdot F(s)$
Dämpfung (reell)	$e^{-\alpha t} f(t); \alpha \text{ reell}$	$\circ \text{---} \bullet$	$F(s + \alpha)$
Dämpfung (komplex)	$e^{(\alpha + j\omega)t} f(t); (\alpha + j\omega) \text{ komplex}$	$\circ \text{---} \bullet$	$F(s - (\alpha + j\omega))$
Integration	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{s} F(s)$
Faltung	$f(t) * g(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$F(s) \cdot G(s)$
Anfangs-Wert	$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \{f(t)\}$	$\longleftrightarrow$	$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \{sF(s)\}$
End-Wert	$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{f(t)\}$	$\longleftrightarrow$	$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \{sF(s)\}$

Der Endwert-Satz gilt nur dann, wenn der Grenzwert im Zeitbereich existiert.

<sup>4</sup>Im Unterschied dazu gilt bei der Fourier-Transformation  $\sigma(0) = 1/2$ : Mittelwert aus links- und rechtseitigem Grenzwert.

### 1.3 Fourier — Laplace

Die Laplace-Transformation hat formale Ähnlichkeiten mit der Fourier-Transformation.<sup>5</sup> Aber es gibt auch wichtige Unterschiede.

- Die Fourier-Transformation  $F(\omega)$  liefert das Spektrum (bzw. die **Spektraldichte**) einer Zeitfunktion  $f(t)$ . Das Spektrum kann meßtechnisch erfaßt werden mit Hilfe eines Spektrum-Analysers.  $f(t)$  kann  $\infty$  lange andauern, z.B. bei periodischen Zeitfunktionen.
- Die Zeitfunktionen bei der Laplace-Transformation beginnen nicht vor dem Zeitpunkt  $t = 0$  (**Einschalt-Zeitpunkt**).

Die Laplace-Transformation  $F(s)$  liefert eine Funktion im „**Unterbereich**“ (Bild-Bereich, Transformations-Bereich), der **keine direkte physikalische Bedeutung** zugeordnet werden kann.<sup>6</sup> Im Unterbereich lassen sich jedoch die **Anfangsbedingungen** einfach berücksichtigen. Im übrigen sind die Rechnungen, die im Unterbereich durchzuführen sind, praktisch identisch mit den Berechnungen, die von der **komplexen Wechselstrom-Rechnung** bekannt sind.

## 2 Lösung von Differentialgleichungen

Differentialgleichungen werden über den „Umweg“ über den Unter-Bereich der Laplace-Transformation gelöst. Dieser „Umweg“ ist aber bequemer als der direkte Lösungsweg. Damit erhält man ein Lösungsschema gemäß Bild 2.1.

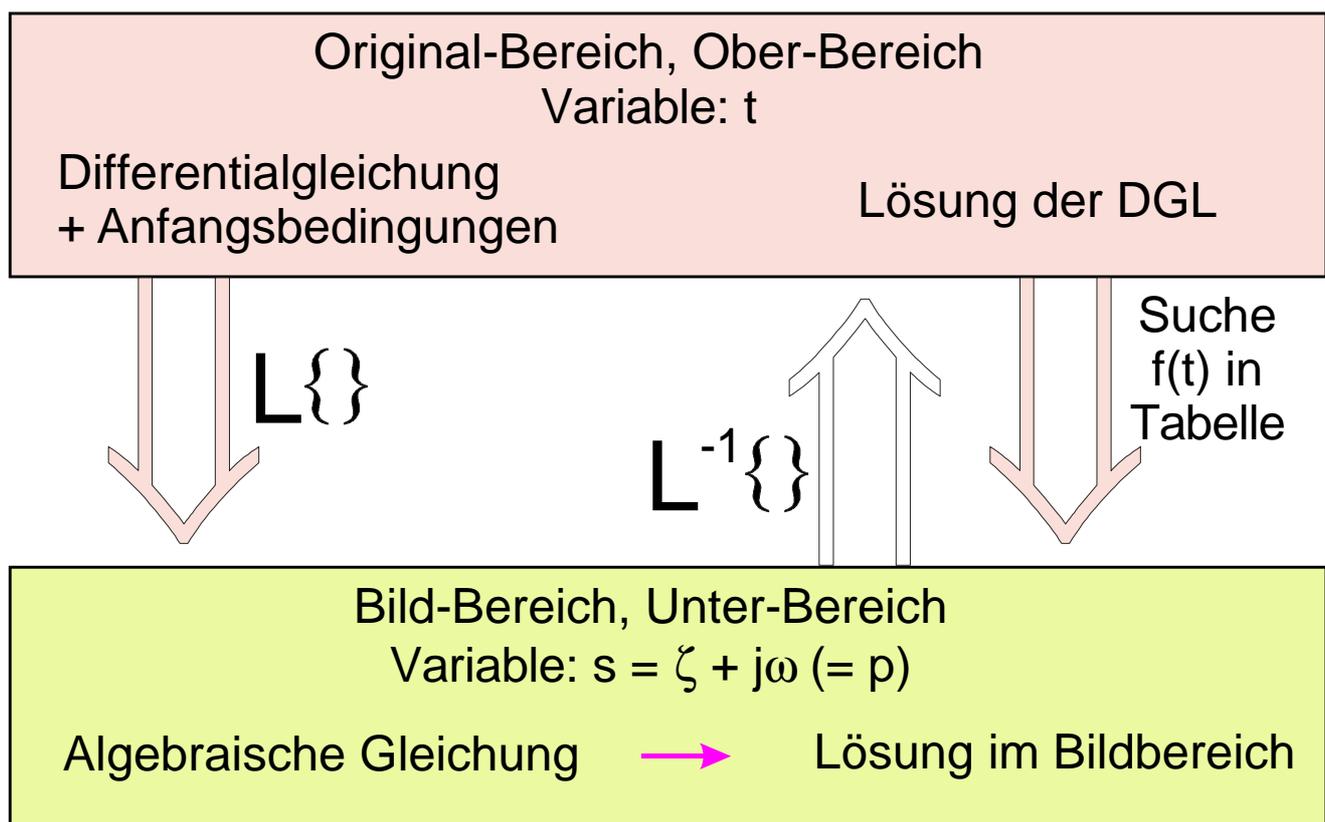


Bild 2.1: Schema zur Lösung von Differentialgleichungen mit der Laplace-Transformation

<sup>5</sup>Siehe hierzu die Definitions-Gleichungen der Fourier-Transformation im Kapitel „AFT“: Anwendungen der Fourier-Transformation. <http://www.diru-beze.de>

<sup>6</sup>In der Literatur wird trotzdem oft verallgemeinernd vom „Spektral-Bereich“ gesprochen. Eine graphische Veranschaulichung wird anhand des „Pol-Nullstellen-Gebirges“ gegeben.

Wichtig an dieser Vorgehensweise ist, daß nicht die Rücktransformation  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  gemäß Gleichung (1.3) durchgeführt wird, sondern daß nur in der **Laplace-Tabelle** (Seite 19) nach den Zeitfunktionen gesucht werden muß, deren Transformierte gleich dem aktuellen  $F(s)$  ist.

## 2.1 Der RLC Tiefpaß als Beispiel

Am Beispiel des RLC-Tiefpasses (RLC-TP), Bild 2.2, soll die Anwendung der Laplace-Transformation gezeigt werden.

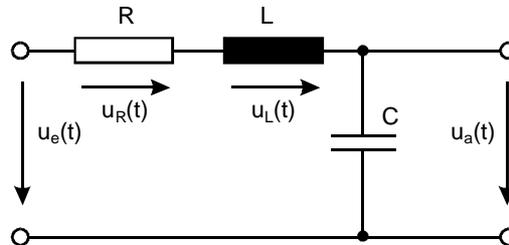


Bild 2.2: Der RLC-Tiefpaß

### 2.1.1 Übertragungsfunktion mit komplexer Rechnung

In einem ersten Schritt berechnet man die Übertragungsfunktion des RLC-TP mit Hilfe komplexer Rechnung.

$$H_{RLC}(\omega) = \frac{U_a(\omega)}{U_e(\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \quad (2.1)$$

$$= \frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC} \quad (2.2)$$

$$= \frac{1}{1 + j\omega T + (j\omega)^2 T_0^2}; \quad T = RC; \quad T_0^2 = LC \quad (2.3)$$

$$= \frac{1}{1 + 2d\frac{j\omega}{\omega_0} + (\frac{j\omega}{\omega_0})^2}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad d = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (2.4)$$

$$H_{RLC}(\omega) = \frac{U_a(\omega)}{U_e(\omega)} = \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2d\omega_0(j\omega) + \omega_0^2} \quad (2.5)$$

Die verwendeten Abkürzungen sind:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{Resonanz-Frequenz} \quad d = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{Dämpfung} \quad (2.6)$$

### 2.1.2 Gewinnung der Differentialgleichung aus der Übertragungsfunktion

Kennt man die Übertragungsfunktion, gewinnt man die Differential-Gleichung mit Hilfe des Zeit-Differentiations-Satzes der **Fourier**-Transformation.

$$\frac{d^n f(t)}{(dt)^n} \quad \longleftrightarrow \quad (j\omega)^n \cdot F(\omega) \quad (2.7)$$

Formal erhält man den Differentiations-Satz der Fourier-Transformation auch aus dem Differentiations-Satz der Laplace-Transformation, indem die Anfangs-Bedingungen zu Null gesetzt werden und in der komplexen Frequenz  $s = \zeta + j\omega$  der Realanteil  $\zeta = 0$  gesetzt wird.

$$\frac{d^n f(t)}{(dt)^n} \circ \bullet \quad s^n \cdot F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-1-k} \implies (j\omega)^n \cdot F(\omega) \quad (2.8)$$

Um den Differentiationssatz anwenden zu können, wird Gleichung (2.5) „über Kreuz“ durchmultipliziert.

$$U_a(\omega) \cdot \{(j\omega)^2 + (j\omega)2d\omega_0 + \omega_0^2\} = \omega_0^2 \cdot U_e(\omega) \quad (2.9)$$

Nach dem Ausmultiplizieren der linken Seite kann der Zeit-Differentiationssatz angewendet werden.

$$\begin{array}{c} (j\omega)^2 U_a(\omega) + 2d\omega_0(j\omega)U_a(\omega) + \omega_0^2 U_a(\omega) = \omega_0^2 U_e(\omega) \\ \circ \bullet \quad \circ \bullet \quad \circ \bullet \quad \circ \bullet \\ \frac{d^2 u_a(t)}{(dt)^2} + 2d\omega_0 \frac{du_a(t)}{dt} + \omega_0^2 u_a(t) = \omega_0^2 u_e(t) \end{array} \quad (2.10)$$

### 2.1.3 Gewinnung der Laplace-Transformierten aus der Differentialgleichung

Nun soll die Laplace-Transformierte unter **Berücksichtigung der Anfangs-Bedingungen** gewonnen werden. Hierfür wird der Zeit-Differentiations-Satz der Laplace-Transformation (Kap. 1.2) angewendet. Aus Gleichung (2.10) folgt damit:

$$\begin{array}{c} \frac{d^2 u_a(t)}{(dt)^2} + 2d\omega_0 \frac{du_a(t)}{dt} + \omega_0^2 u_a(t) = \omega_0^2 u_e(t) \\ \circ \bullet \quad \circ \bullet \quad \circ \bullet \quad \circ \bullet \\ \{s^2 U_a(s) - s u_a(0) - u'_a(0)\} + 2d\omega_0 \{s U_a(s) - u_a(0)\} + \omega_0^2 U_a(s) = U_e(s) \cdot \omega_0^2 \end{array} \quad (2.11)$$

Gleichung (2.11) wird so umsortiert, daß alle Terme mit  $U_a(s)$  auf der linken Seite stehen.

$$U_a(s) \{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2\} = U_e(s) \cdot \omega_0^2 + \{u_a(0)(s + 2d\omega_0) + u'_a(0)\} \quad (2.12)$$

Nun wird nach  $U_a(s)$  aufgelöst.

$$U_a(s) = U_e(s) \cdot \left\{ \underbrace{\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}}_{\text{Übertragungs-Funktion } H_{RLC}(s)} \right\} + \underbrace{\frac{u_a(0)(s + 2d\omega_0) + u'_a(0)}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}}_{\text{Anfangswerte-Funktion } U_{a_0}(s)} \quad (2.13)$$

## 2.2 Sprung-Antwort des RLC Tiefpasses

Die Sprung-Antwort  $a(t)$  eines Systems erhält man (per Definition) dann, wenn die **Eingangs-Größe ein Sprung** ist,  $u_e(t) = \sigma(t)$ , und **alle Energiespeicher** des Systems **ungeladen** sind, d.h. **alle Anfangsbedingungen sind Null**:  $u_a(0) = u'_a(0) = \dots = 0$ .

### 2.2.1 Spezialfall von Gleichung (2.13): Alle Anfangs-Bedingungen sind Null

Die Übertragungs-Funktion  $H_{RLC}(s)$  in Gleichung (2.13) ist (abgesehen von der Variablen  $s$ ) identisch mit der Übertragungs-Funktion  $H_{RLC}(\omega)$  in Gleichung (2.5). Falls also die Anfangs-Bedingungen alle Null sind (alle Energiespeicher zum Einschalt-Zeitpunkt sind leer), kann man sofort das mit Hilfe der komplexen Rechnung gewonnene Ergebnis verwenden, indem  $j\omega \rightarrow s$  ersetzt wird.

$$H_{RLC}(\omega) \xrightarrow{j\omega \rightarrow s} H_{RLC}(s) \quad (2.14)$$

Der Zwischenschritt über die DGL ist dann also nicht erforderlich.

Es soll nun am Beispiel RLC TP gezeigt werden, wie man mit Hilfe von MATLAB die Sprung-Antwort eines LTI Systems bestimmt, das durch seine Übertragungsfunktion (Zählerpolynom & Nennerpolynom) definiert ist.

## 2.2.2 Bestimmung der Sprungantwort mit MATLAB

Per Definition ist die Sprungantwort  $a(t)$  die Antwort eines Systems, dessen Speicher alle leer sind (alle Anfangsbedingungen sind Null), auf einen Sprung  $\sigma(t)$  als Eingangsgröße. Wenn aber alle Speicher leer sind, kann man direkt mit der Übertragungsfunktion arbeiten, wie sie mit komplexer Rechnung bestimmt werden kann. Diesen Zusammenhang verwendet MATLAB. Es genügt daher, hierfür die Koeffizienten für das Zähler- und das Nenner-Polynom des Systems (in absteigender Ordnung) anzugeben. In der „Control“ Toolbox von MATLAB stehen dann fertige Befehle zur Verfügung, mit denen die Sprungantwort unmittelbar dargestellt werden kann.

```
%Control Toolbox ist notwendig
Z1=[1];           %Zählerpolynom
%Nennerpolynome in absteigender Ordnung
N1=[1 1 1];      % d=0.5
N2=[1 2 1];      % d=1
N3=[1 .5 1];     % d=0.25
N4=[1 .25 1];    % d=0.125

T=linspace(0,10,500);
a1=step(Z1,N1,T); % Sprungantwort
a2=step(Z1,N2,T);
a3=step(Z1,N3,T);
a4=step(Z1,N4,T);

figure(1)
plot(T,a2,'--k',T,a1,'b',T,a3,'--m',T,a4,'g')
grid
xlabel('Zeit t in sek.')
ylabel('a(t)')
title('Sprungantwort eines RLC Tiefpaß--Systems')
legend('Dämpfung: 1','Dämpfung: 0.5','Dämpfung: 0.25','Dämpfung: 0.125',0)
```

Die mit MATLAB berechneten Sprungantworten eines RLC Tiefpasses zeigt Bild 2.3 (Parameter: Dämpfung  $d = [0.125, 0.25, 0.5, 1]$ )

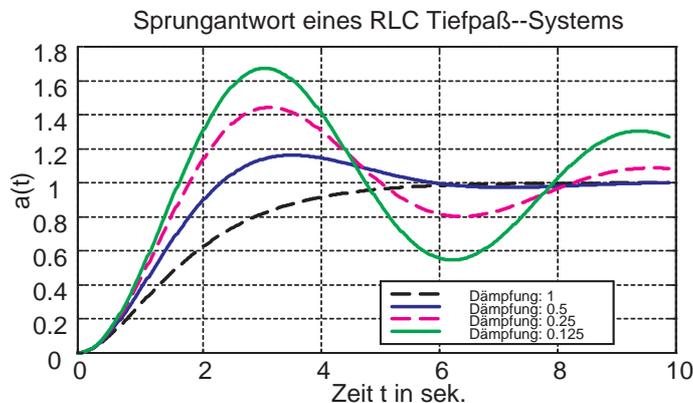


Bild 2.3: Sprungantwort  $a(t)$  des RLC-Tiefpasses für Dämpfungen  $d = [0.125, 0.25, 0.5, 1]$

## 2.3 Berücksichtigung der Anfangswerte

### 2.3.1 Umrechnung der Anfangs-Werte der Speicher auf die Anfangs-Werte der Ausgangs-Größe

Der 1. Energie-Speicher ist der Kondensator  $C$ . Da  $u_a(t) = u_C(t)$  ist, kann aus Bild 2.2 (Seite 4) die Anfangs-Bedingung für  $u_a(0)$  direkt abgelesen werden.

$$u_a(0) = u_C(0) \quad (2.15)$$

Der 2. Energie-Speicher ist die Induktivität  $L$ . Diese hat als Anfangs-Bedingung den Strom  $i_L(0)$ .

Der Strom  $i_L(t)$  der Spule  $L$  fließt (auch) durch den Kondensator  $C$ , da der Ausgang unbelastet sein soll. Dadurch wird der Kondensator  $C$  geladen, siehe auch Bild 3.1 (Seite 8). Damit erhält man den Zusammenhang:

$$i_L(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \cdot u'_C(t) = C \cdot u'_a(t) \rightsquigarrow \boxed{u'_a(0) = \frac{i_L(0)}{C}} \quad (2.16)$$

Damit sind die Anfangs-Werte bestimmt, die in die Anfangswerte-Funktion  $U_{a_0}(s)$  in Gleichung (2.13) einzusetzen sind.

### 2.3.2 RLC Tiefpaß mit Anfangs-Bedingungen und Sprung am Eingang

Die Laplace-Transformierte des Sprungs, Gleichung (1.5), wird in Gleichung (2.13) eingesetzt.

$$U_a(s) = \underbrace{\hat{u}_e \frac{1}{s}}_{U_e(s)} \cdot \left\{ \underbrace{\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}}_{\text{Übertragungsfunktion } H_{RLC}(s)} \right\} + \underbrace{\frac{u_a(0)(s + 2d\omega_0) + u'_a(0)}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}}_{\text{Anfangswerte-Funktion } U_{a_0}(s)} \quad (2.17)$$

Damit ergeben sich 3 Teile, für die mit Hilfe der Laplace-Tabellen der Zeitverlauf bestimmt werden muß.

$$U_a(s) = \hat{u}_e \underbrace{\frac{\omega_0^2}{s \cdot (s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2)}}_{\text{Teil 1}} + u_a(0) \underbrace{\frac{s}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}}_{\text{Teil 2}} + \underbrace{\frac{[u_a(0)2d\omega_0 + u'_a(0)]}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}}_{\text{Teil 3}} \quad (2.18)$$

Hierfür findet man folgende Korrespondenzen, die an die aktuellen Bezeichnungen noch etwas angepaßt werden müssen, hier speziell Teil 3. Die Korrespondenzen 16 – 18 gelten für den Fall daß die Dämpfung  $d < 1$  ist (Schwing-Fall). Für  $d \geq 1$  (aperiodischer Fall) sind die Korrespondenzen 9 – 11 zu verwenden.

Nr.	$F(s)$	$f(t)$ für $t \geq 0 \rightsquigarrow f(t)\sigma(t)$
18	$\frac{\omega_0^2}{s \cdot (s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2)}$	$1 - \frac{e^{-d\omega_0 t}}{\omega_d} [d\omega_0 \sin(\omega_d t) + \omega_d \cos(\omega_d t)]$
17	$\frac{s}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}$	$\frac{e^{-d\omega_0 t}}{\omega_d} [d\omega_0 \sin(\omega_d t) + \omega_d \cos(\omega_d t)]$
16	$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}$	$\omega_0^2 \frac{e^{-d\omega_0 t}}{\omega_d} \sin(\omega_d t)$
	Bei 16, 17 & 18 ist:	$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - d^2}; \quad d < 1$
11	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} \left\{ 1 + \frac{1}{a-b} [be^{-at} - ae^{-bt}] \right\}$
10	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a} [be^{-bt} - ae^{-at}]$
9	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a} [e^{-at} - e^{-bt}]$

Tabelle 1: Auszug aus den Laplace Korrespondenzen

Um zu entscheiden, welche dieser Korrespondenzen für das gegebene Problem zutreffen, muß die **Charakteristische Gleichung** des Systems gelöst werden. Diese entsteht wenn das Charakteristische Polynom zu Null gesetzt wird.

Der Nenner in Gleichung (2.13) oder Gleichung (2.17) ist dieses „**Charakteristische Polynom**“ des RLC Tiefpasses.

$$\boxed{N(s) = s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2 \quad \text{Charakteristisches Polynom}} \quad (2.19)$$

### 3 Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion

#### 3.1 Die Polstellen der Übertragungsfunktion

Ob der Schwing-Fall oder der aperiodische Fall vorliegt, sieht man sofort, wenn die Nullstellen (d.h. die Lösungen) der Charakteristischen Gleichung bestimmt werden.<sup>1</sup>

Aus der Bedingung

$$N(s) = s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \quad \text{Charakteristische Gleichung des RLC TP} \quad (3.1)$$

folgt für die Nullstellen  $s^\infty$  der charakteristischen Gleichung:

$$s_{1,2}^\infty = \begin{cases} -\omega_0 d \pm \omega_0 \sqrt{d^2 - 1} & \text{für } d \geq 1 \quad \leadsto s_{1,2}^\infty \quad \text{reell: aperiodischer Fall} \\ \underbrace{-\omega_0 d}_{\zeta_0} \pm \underbrace{j\omega_0 \sqrt{1 - d^2}}_{j\omega_d} & \text{für } d < 1 \quad \leadsto s_{1,2}^\infty \quad \text{komplex: Schwing-Fall} \end{cases} \quad (3.2)$$

Physikalisch gesehen können **Eigenschwingungen nur dann** auftreten, **wenn der Eingang kurz geschlossen** wird ( $u_e(t) = 0$ ) und die **Speicher sich entladen**. Aus Bild 2.2 (Seite 4) erkennt man, daß in diesem Fall ein (geschlossener) LC Schwingkreis (mit Dämpfung durch  $R$ ) vorliegt. Das bedeutet aber, daß das Charakteristische Polynom für den RLC TP und den LC Parallel-Schwingkreis prinzipiell gleich sind, Bild 3.1.

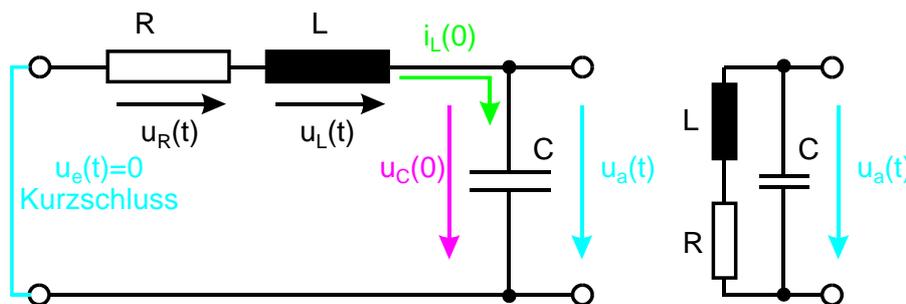


Bild 3.1: Der Eingang muß kurz geschlossen sein und die Energiespeicher müssen geladen sein, damit ein RLC-Tiefpaß Eigenschwingungen ausführen kann. Diese sind identisch mit denen eines entsprechenden LC-Parallelkreises.

Wenn der Eingang kurz geschlossen ist und damit  $u_e(t) = 0$  wird, folgt daraus, daß auch die transformierte  $U_e(s) = 0$  sein muß. Eingesetzt in die Übertragungsfunktion folgt dann für  $s = s^\infty$ :

$$H(s^\infty) = \frac{Z(s^\infty)}{N(s^\infty)} = \frac{U_a(s^\infty)}{U_e(s^\infty)} = \frac{U_a(s^\infty)}{0} \rightarrow \infty \quad \text{Polstelle} \quad (3.3)$$

- Eigenschwingungen eines Systems sind dadurch gekennzeichnet, daß eine Ausgangs-Spannung entsteht, obwohl die Eingangs-Spannung identisch Null ist.

Wie aus Gleichung (3.3) zu erkennen ist, wird dadurch  $H(s^\infty) \rightarrow \infty$  für den betreffenden Wert  $s^\infty$ , obwohl die (Anfangs-) Amplitude der Eigenschwingung nur einen endlichen Wert besitzt, der von der Größe der im System gespeicherten Energie abhängt. Die Übertragungsfunktion  $H(s)$  hat an der betreffenden Stelle von  $s^\infty$  einen Pol.

Da das Charakteristische Polynom  $N(s)$  im Nenner der Übertragungs- oder System-Funktion steht, ergeben seine Nullstellen die Polstellen der System-Funktion. Bild 3.2 (Seite 9) stellt den Polstellen-Plan eines Systems 2. Ordnung dar, wobei die Lage der Polstellen als Parameter dient. Zusätzlich ist jeweils die für die betreffende Polstelle charakteristische Eigenschwingung des Systems dargestellt.

<sup>1</sup>Sind die Werte der Bauelemente des RLC TP bekannt, läßt sich die Dämpfung direkt mit Gleichung (2.6) bestimmen.

Da ein RLC TP (oder ein Schwingkreis) ein **stabiles System** ist, kann er nur **abklingende Eigenschwingungen** ausführen. Die zugehörigen Polstellen (abhängig von der Dämpfung  $d = \frac{R}{2} \sqrt{C/L}$ ) befinden sich in der **negativen s Halbebene** mit  $\Re\{s\} = \zeta < 0$ . In Abhängigkeit von  $d$  liegen die Polstellen auf einem Kreis mit dem Radius  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

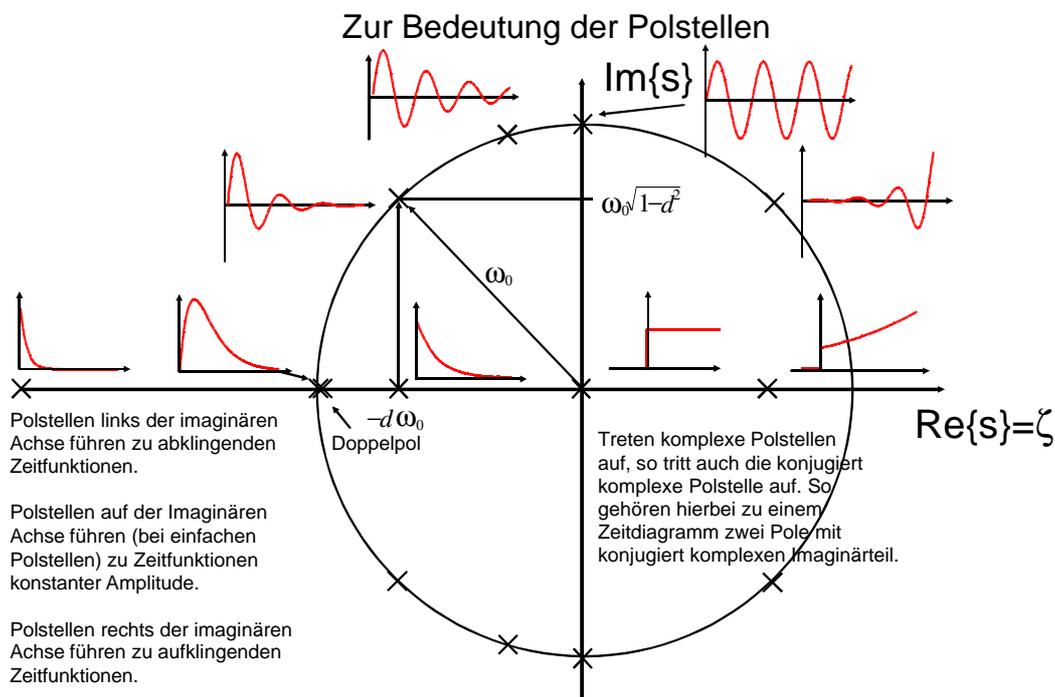


Bild 3.2: Die Polstellen  $\times$  der Übertragungs- oder System-Funktion bestimmen die Eigenschwingungen des Systems (System 2. Ordnung). Für  $d < 1$  liegen die beiden Polstellen (in Abhängigkeit von  $d$ ) auf einem Kreis mit dem Radius  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

### 3.1.1 Polstellen in der rechten Halbebene bzw. auf der $j\omega$ -Achse: Oszillator

Wird ein Schwingkreis mit einem Verstärker (z.B. Transistor) so zusammengeschaltet, daß seine Verluste hierdurch ausgeglichen werden, erhält man einen Oszillator, der Dauerschwingungen ausführt, Bilder 3.3 & 3.4. Die charakteristischen Polstellen hierfür liegen exakt auf der  $j\omega$  Achse. Somit stellt der Fall  $\zeta = 0$  bereits einen instabilen Fall (eines Übertragungs-Systems) dar.

Beim Anschwingen eines Oszillators wird die Dämpfung des Schwingkreises durch die Rückkopplung über-kompensiert. Damit wird die resultierende Dämpfung (des Gesamt-Systems) negativ und es kommt zu aufklingenden Schwingungen. Im Polstellen-Plan ist das der Bereich rechts der  $j\omega$  Achse im Bereich  $\Re\{s\} > 0$ .

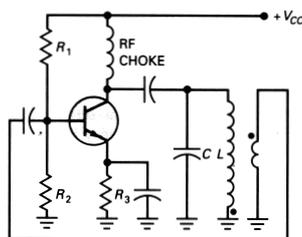


Bild 3.3: Beispiel eines Meißner-Oszillators

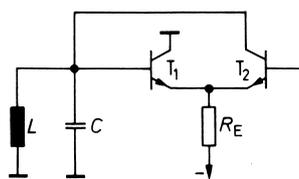


Bild 3.4: Beispiel eines LC-Oszillators mit Differenzverstärker

Bei einem Oszillator kommt es nach dem Einschalten zunächst zu aufklingenden Schwingungen (kleiner Amplitude). Wenn die Amplitude der Schwingung größer wird, kommt es zu Verschiebungen des Arbeitspunktes (des Transistors), wodurch sich schließlich die Amplitude der Dauerschwingung ausbildet.

**Bitte beachten:** Aus dem Polstellen-Plan geht die tatsächliche Amplitude einer Schwingung nicht hervor, sondern nur die prinzipielle Form der Schwingung.

### 3.1.2 Polstellen-Gebirge des RLC-TP

Trägt man den Betrag  $|H(s)|$  der Übertragungsfunktion über der komplexen  $s = \zeta + j\omega$  Ebene auf, so erhält man (allgemein) ein „Pol-Nullstellen-Gebirge“. Die Polstellen entstehen an den Stellen, wo der Nenner  $N(s)$  der Übertragungsfunktion Null ist ( $N(s) = 0$ ), während Nullstellen der Übertragungsfunktion an den Stellen sind, wo der Zähler  $Z(s) = 0$  ist.

Im Beispiel des RLC Tiefpasses ist der Zähler  $Z(s) = \omega_0^2$ , also konstant. Daher gibt es hier keine Nullstellen. Man erhält daher nur ein „Polstellen-Gebirge“, Bilder 3.5 (Amplitude linear) und 3.6 (Amplitude logarithmisch in dB).

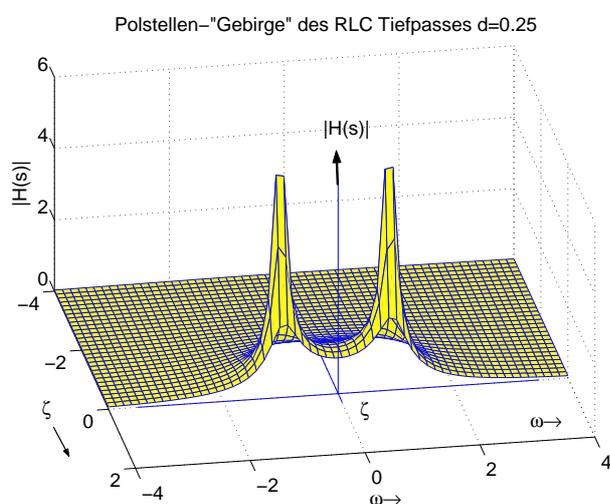


Bild 3.5: „Polstellen-Gebirge“ des RLC-Tiefpasses für die Dämpfung  $d = 0.25$

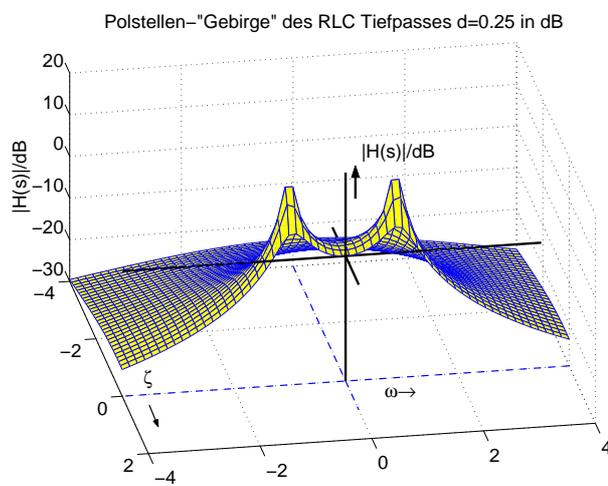


Bild 3.6: „Polstellen-Gebirge“ des RLC-Tiefpasses für die Dämpfung  $d = 0.25$  (Amplituden: logarithmisch in dB, Frequenz: linear)

Gezeichnet ist das „Gebirge“ jeweils für  $\zeta \leq 0$  und  $|H(s)| < 6$ . Mit  $\zeta = 0$  erhält man eine „Schnittebene“ durch das „Gebirge“ entlang der  $j\omega$  Achse. Die so entstehende Kontur stellt dann  $|H(j\omega)| = A(\omega)$  dar, also den **Amplitudengang**<sup>2</sup>. Deutlich ist erkennbar, wie die Resonanz-Überhöhungen des Amplitudengangs durch das „Anschneiden“ der Pol-„Türme“ entsteht. Je dichter die Pole bei der  $\omega$  Achse liegen, umso größer wird die Resonanz-Überhöhung.

### 3.1.3 Bode-Diagramm des RLC-TP

Das Bode-Diagramm stellt  $20 \log_{10} A(\omega) = 20 \log_{10} |H(\omega)|$  und  $\Phi(\omega) = \angle\{H(\omega)\}$  über einer logarithmisch unterteilten Frequenzachse dar, also über  $\log_{10}[\omega/\omega_n]$ , wobei  $\omega_n$  eine geeignet gewählte Frequenz ist. Frequenzen  $\omega \leq 0$  lassen sich logarithmisch nicht auftragen. Der Nullpunkt der Frequenzachse ist im Bode-Diagramm bei  $-\infty$ , Bild 3.7.<sup>3</sup>

Mit Hilfe von MATLAB kann das Bode-Diagramm gezeichnet werden:

<sup>2</sup>Im Zusammenhang mit der Laplace-Transformation ist es durchaus üblich  $H(j\omega)$  zu schreiben, während sonst meist  $H(\omega)$  geschrieben wird.

<sup>3</sup>Im Gegensatz dazu ist im Polstellen-Gebirge (Bild 3.6) nur der Betrag logarithmisch aufgetragen, während die Frequenzen linear aufgetragen sind, so daß dort auch negative Frequenzen darstellbar sind.

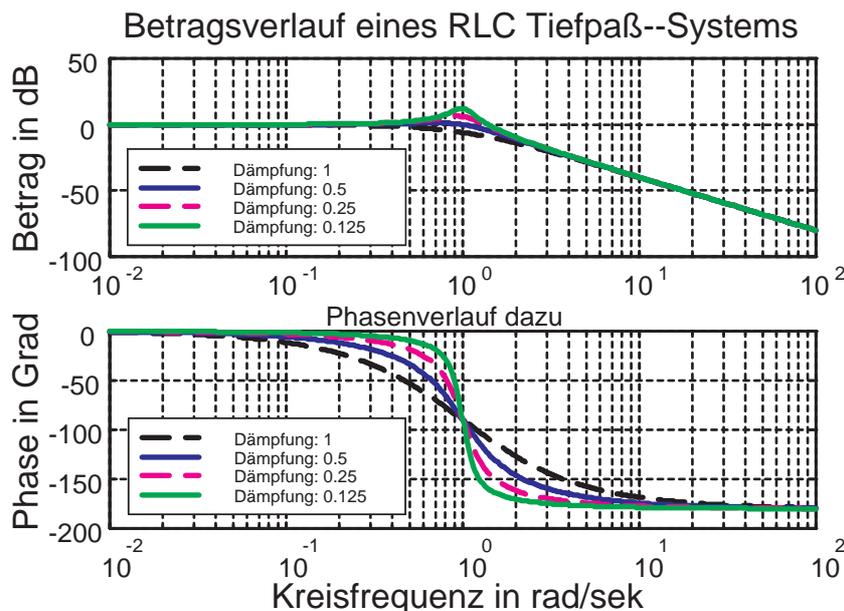


Bild 3.7: Bode-Diagramm des RLC-Tiefpasses (Betrag und Phase) für Dämpfungen  $d = [0.125, 0.25, 0.5, 1]$

### 3.2 Der RC Spannungsteiler als Beispiel für Pol und Nullstelle

Der RC-Spannungsteiler in der Form Bild 3.8 findet eine Anwendung in der Tastspitze eines Oszilloskopes, Bild 3.9. Mittels der Tastspitze verringert sich die Belastung der zu messenden Spannung.

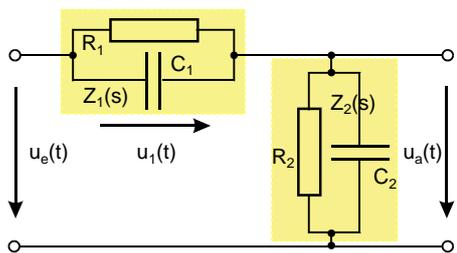


Bild 3.8: Schaltbild des RC-Spannungsteilers

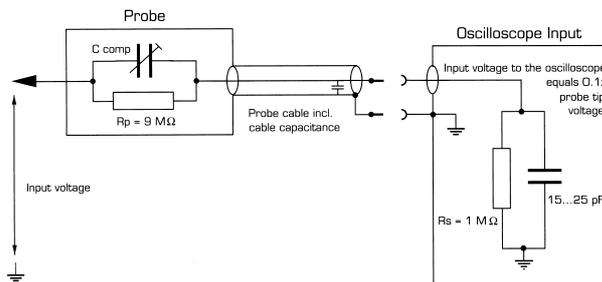


Bild 3.9: Oszilloskop mit Tastspitze

Der Kompensations-Kondensator  $C_{comp}$  der Tastspitze muß dabei so eingestellt werden, daß das Teilerverhältnis frequenzunabhängig wird. Im Beispiel Bild 3.9 handelt es sich um eine Tastspitze mit Verhältnis 10 : 1, wie man sofort aus den Werten der Widerstände sieht.

#### 3.2.1 Übertragungsfunktion des RC-Spannungsteilers

Für den Spannungsteiler (Bild 3.8) gilt zunächst allgemein:

$$H_{RC}(\omega) = \frac{Z_2(\omega)}{Z_1(\omega) + Z_2(\omega)} \tag{3.4}$$

Die Berechnung der Übertragungsfunktion  $H_{RC}(\omega)$  gestaltet sich einfach, wenn man beachtet, daß die beiden komplexen Widerstände  $Z_1, Z_2$  des Teilers die gleiche Struktur  $Z_{1,2}$  haben.

$$Z_{1,2}(\omega) = \frac{R_{1,2} \cdot \frac{1}{j\omega C_{1,2}}}{R_{1,2} + \frac{1}{j\omega C_{1,2}}} = \frac{R_{1,2}}{1 + R_{1,2}j\omega C_{1,2}} = \frac{R_{1,2}}{1 + j\omega T_{1,2}}; \quad T_{1,2} = R_{1,2} \cdot C_{1,2} \tag{3.5}$$

Damit wird aus Gleichung (3.4)

$$H_{RC}(\omega) = \frac{\frac{R_2}{1+j\omega T_2}}{\frac{R_2}{1+j\omega T_2} + \frac{R_1}{1+j\omega T_1}} = \frac{R_2(1+j\omega T_1)}{R_2(1+j\omega T_1) + R_1(1+j\omega T_2)} \quad (3.6)$$

$$= \frac{R_2(1+j\omega R_1 C_1)}{(R_1+R_2) + j\omega R_1 R_2 (C_1+C_2)} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1+j\omega R_1 C_1}{1+j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} (C_1+C_2)} \quad (3.7)$$

$$H_{RC}(\omega) = K \cdot \frac{1+j\omega T_Z}{1+j\omega T_N}; \quad K = \frac{R_2}{R_1+R_2}; \quad T_Z = T_1; \quad T_N = (R_1 \parallel R_2) \cdot (C_1 \parallel C_2) \quad (3.8)$$

- Das Teilverhältnis  $K = \frac{R_2}{R_1+R_2}$  gilt für Gleichspannung, also für die Frequenz  $\omega = 0$ .
- Die Zeitkonstante des Zählers  $T_Z$  bestimmt sich aus dem komplexen Widerstand  $Z_1$  zwischen Ein- und Ausgang.
- Die Nennerzeitkonstante  $T_N$  ergibt sich aus der Parallelschaltung von  $Z_1$  und  $Z_2$ . Andererseits ergibt sich  $T_N$  auch aus der Lösung des Charakteristischen Polynoms des RC-Teilers. Dafür muß aber  $u_e(t) = 0$  gesetzt werden, wodurch sich die Parallelschaltung von  $Z_1$  und  $Z_2$  ergibt, wie sofort aus Bild 3.8 zu erkennen ist.
- Aus der Parallelschaltung von  $Z_1$  und  $Z_2$  ist unmittelbar einsichtig, daß diese Struktur des RC-Spannungsteilers nur eine Anfangsbedingung  $u_a(0)$  haben kann, obwohl 2 Energiespeicher vorhanden sind.

### 3.2.2 Pol-Nullstellen-Gebirge des RC-Spannungsteilers

Das Pol-Nullstellen-Gebirge  $|H_{RC}(s)|$  des (nicht abgeglichenen) RC-Spannungsteilers ist in Bild 3.10 dargestellt. Da die Schnittlinie entlang der  $\zeta$ -Achse läuft, sind Polstelle ( $s = s^\infty$ ) und Nullstelle ( $s = s_0$ ) deutlich erkennbar.

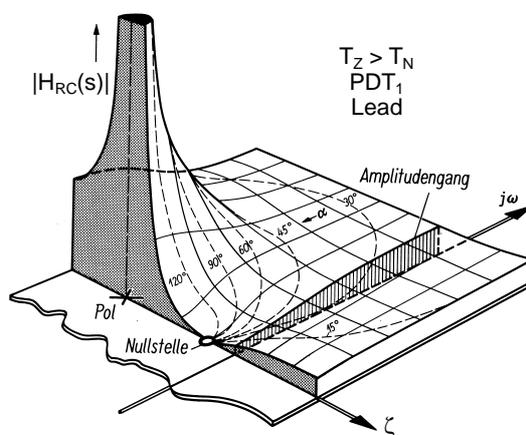


Bild 3.10: Pol-Nullstellen-Gebirge  $|H_{RC}(s)|$  des RC-Spannungsteilers ( $PDT_1$ ); Schnittlinie entlang der  $\zeta$ -Achse

In Bild 3.10 ist die Nullstelle  $s_0 = 1/T_Z$  dichter an der  $j\omega$ -Achse als die Polstelle  $s^\infty = 1/T_N$ . Daher überwiegt der Einfluß der Nullstelle gegenüber dem der Polstelle auf den Amplitudengang  $|H_{RC}(\omega)|$ .

$$s_0 = 1/T_Z < s^\infty = 1/T_N \quad \rightsquigarrow \quad T_Z > T_N \quad (3.9)$$

### 3.3 Bode-Diagramm des $PDT_1$ Systems

Je nachdem  $T_Z < T_N$  oder  $T_N < T_Z$  ist, überwiegt entweder das integrierende oder das differenzierende Verhalten bei dem RC-Spannungsteiler. In regelungstechnischer Bezeichnungsweise handelt es sich um ein  $PDT_1$ -Glied und es ist genauer:

- für  $T_Z < T_N$  (integrierend) ein „Lag“-Glied mit nachteiliger Phase
- für  $T_N < T_Z$  (differenzierend) ein „Lead“-Glied mit vorteilhafter Phase

Diese Eigenschaften ersieht man aus dem Bode-Diagramm des  $PDT_1$  Gliedes.

### 3.3.1 Betrag des Bode-Diagramms

Für den Betrag der Übertragungsfunktion des RC-Spannungsteilers ( $PDT_1$ -Glied) ergibt sich aus Gleichung (3.8):

$$|H_{RC}(\omega)| = |H_{PDT_1}(\omega)| = K \cdot \frac{\sqrt{1 + (\omega T_Z)^2}}{\sqrt{1 + (\omega T_N)^2}} \quad (3.10)$$

Diese Gleichung läßt sich bequem auswerten. Es sei (wie in Bild 3.10)  $T_Z > T_N$  angenommen (differenzierendes Verhalten, Lead) mit  $T_Z/T_N = m$ . Hierfür betrachtet man die Fälle:

$$\omega \rightarrow 0 \quad \text{daraus folgt} \quad |H_{PDT_1}(\omega)| \approx K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.11)$$

$$\omega = \omega_Z = 1/T_Z \quad \text{daraus folgt} \quad |H_{PDT_1}(\omega)| \approx K \cdot \sqrt{2} \quad (3.12)$$

$$\omega_Z = 1/T_Z < \omega < \omega_N = 1/T_N \quad \text{daraus folgt} \quad |H_{PDT_1}(\omega)| \approx K \cdot \omega T_Z \quad (3.13)$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad \text{daraus folgt} \quad |H_{PDT_1}(\omega)| \approx K \cdot \frac{T_Z}{T_N} = m \cdot K = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad (3.14)$$

Das Ergebnis für  $\omega \rightarrow \infty$  ergibt sich aus Gleichung (3.7) oder direkt aus dem Schaltbild, Bild 3.8.

### 3.3.2 Zeichnen des Betrags des Bode-Diagramms

Die Näherungen für den Betrag des Bode-Diagramms können unmittelbar in ein Diagramm umgesetzt werden, Bild 3.11. An der Stelle  $\omega = \omega_Z$  erfolgt ein **Aufwärts-Knick** mit Steigung  $+20$  dB/Dekade. An der Stelle  $\omega = \omega_N$  erfolgt ein **Abwärts-Knick** mit Steigung  $-20$  dB/Dekade, so daß sich resultierend eine Steigung von  $0$  dB/Dekade mit dem Betrag  $m \cdot K = K \cdot T_Z/T_N = |H_{Lead}(\omega \rightarrow \infty)| > K$  ergibt.

Da der Betrag logarithmisch dargestellt ist, ergibt sich aus einem Produkt bzw. Quotienten in der Übertragungsfunktion im Betrag des Bode-Diagramms die Summe bzw. Differenz der Logarithmen der einzelnen Teile. Eine Multiplikation wird zur Addition, was auch für die Konstante  $K$  zutrifft.

Da die Frequenzachse im Bode-Diagramm logarithmisch unterteilt ist, werden die Verläufe entsprechend zu  $1/\omega$  als Geraden mit der Steigung  $-20$  dB/Dekade dargestellt.

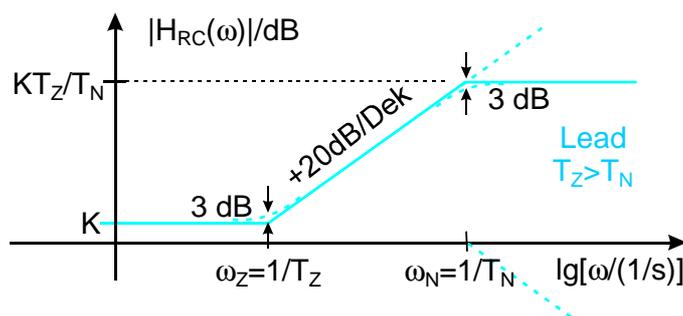


Bild 3.11: Betrag des Bode-Diagramms für das Lead Glied (Tangenten-Näherung)

An den Knickstellen ist der exakte Verlauf des Betrags  $3$  dB unterschiedlich zu den Tangenten (gestrichelt gezeichnet). Im Bode-Diagramm ist das i.w. aber nur eine kleine Korrektur bezüglich der Tangenten-Näherungen.

Beim Lag-Glied ist  $\omega_N < \omega_Z$ , so daß hier zuerst der Abwärts-Knick und dann der Aufwärts-Knick erfolgt. Damit ergibt sich  $|H_{Lag}(\omega \rightarrow \infty)| < K$ .

### 3.3.3 Bode-Diagramm in Betrag und Phase für Lead und Lag

Die exakten Verläufe der Bode-Diagramme für Lead und Lag Verhalten des  $PDT_1$  Gliedes lassen sich wieder mit Hilfe von MATLAB berechnen, Bild 3.12 mit  $\omega_Z = 1 \text{ rad/sec}$  & Bild 3.13 mit  $\omega_N = 1 \text{ rad/sec}$ . Für beide Fälle ist  $K = 1$  gewählt.

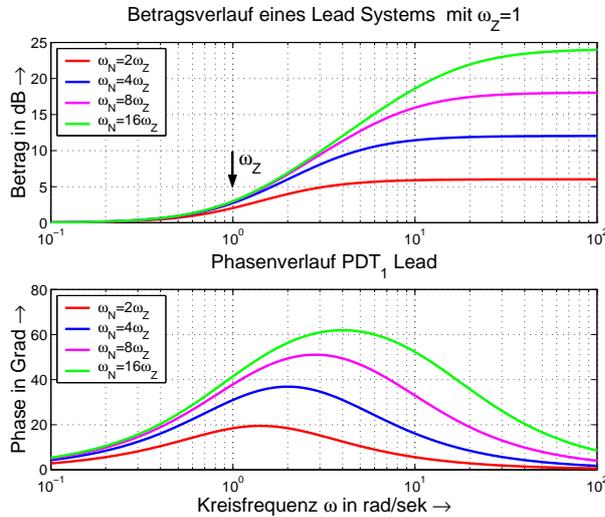


Bild 3.12: Bode-Diagramm Betrag und Phase Lead

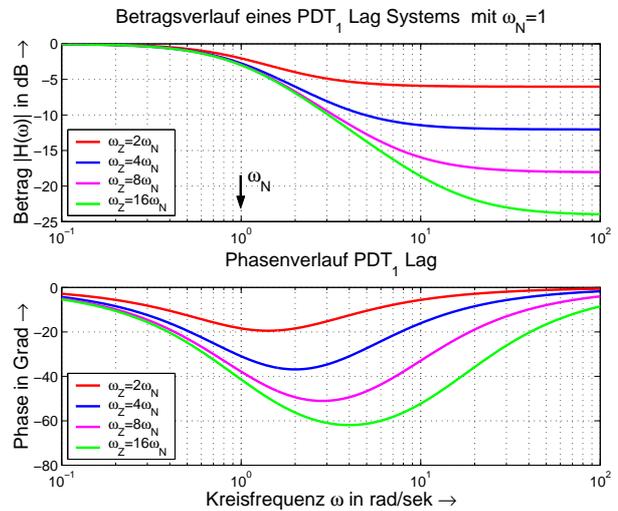


Bild 3.13: Bode-Diagramm Betrag und Phase Lag

Für den Phasenverlauf gibt es keine (einfache) Tangenten-Näherung, da die Phase sich über den  $\arctan$  berechnet und dann noch logarithmisch über der Frequenz aufzutragen ist. In Bild 3.14 sind die Phasen für Lead-Glieder mit  $T_Z/T_N = m$  mit  $[m = 2; 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15]$  aufgetragen. Dabei ist jeweils  $\omega_Z = 1$  und  $\omega_N = m \cdot \omega_Z$ . Für Lag-Glieder gelten die Kurven auch, wenn  $T_Z$  mit  $T_N$  vertauscht wird und die Phasen mit negativem Vorzeichen versehen werden, entsprechend zu Bild 3.13.

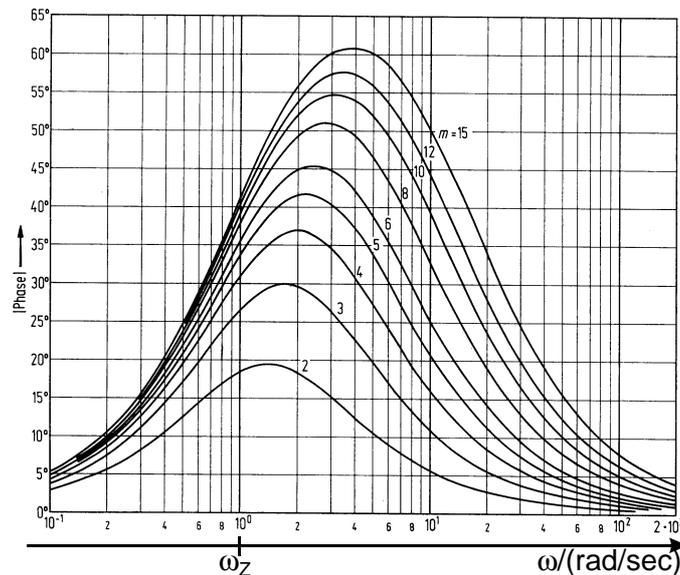


Bild 3.14: Phasen für Lead-Glieder mit  $T_Z/T_N = m$  mit  $[m = 2; 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15]$

### 3.3.4 Realisierung von Lead und Lag mit Hilfe von Operationsverstärkern

Mit einem RC-Spannungsteiler (passive Realisierung) können nur Werte  $K < 1$  realisiert werden. Ist ein Wert  $K > 1$  (Verstärkung) gefordert, benötigt man einen Verstärker. Wird ein Operations-Verstärker (OV) verwendet, läßt sich die notwendige Beschaltung aus dem Verlauf des Betrages im Bode-Diagramm bestimmen.

Man unterteilt dazu den Verlauf in seine Bestandteile entsprechend zu der Tangenten-Näherung in Abschnitt 3.3 und legt fest, welcher Teil der Beschaltung des OV asymptotisch das entsprechende Übertragungsverhalten erzeugt. Dies wird am Beispiel des Bode-Diagramms Bild 3.11 gezeigt, Bild 3.15.

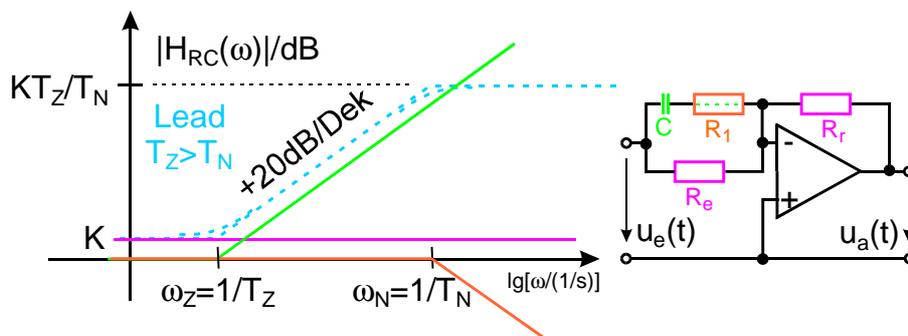


Bild 3.15: Zur Gewinnung der Beschaltung eines Operationsverstärkers aus dem Verlauf des Bodediagramms

Aus einer (formalen) Berechnung der Übertragungsfunktion des invertierenden OV ( $H(\omega) = -Z_r(\omega)/Z_e(\omega)$ ) folgt:

1. Da beim RC-Spannungsteiler nur 1 Anfangsbedingung vorgegeben werden konnte, ist bei einer Realisierung mit einem OV auch nur 1 Kondensator (Energiespeicher) erforderlich.
2. Der Wert  $K$  der Konstanten bestimmt das Verhältnis  $R_r/R_e$ . Hierbei hat man einen Freiheitsgrad, denn man muß festlegen, wie hochohmig man dimensionieren will. (Farbe: magenta)
3. An der Stelle  $\omega_Z$  soll ein Aufwärts-Knick erfolgen. (Farbe: grün) Dies wird erreicht durch einen Kondensator  $C$  parallel zu  $R_e$ . (Daraus folgt  $T_Z = C \cdot (R_e + R_1)$ )
4. An der Stelle  $\omega_N$  soll ein Abwärts-Knick erfolgen. (Farbe: orange) Dies wird erreicht durch eine Serienschaltung eines Widerstandes  $R_1$  zum Kondensator  $C$ . (Daraus ergibt sich  $T_N = R_1 C$ )
5. Der Wert  $K \cdot T_Z/T_N$  ergibt sich aus dem Verhältnis  $R_r/(R_e \parallel R_1)$ . (Daraus ergibt sich  $R_1$ )
6. Der Wert von  $C$  ergibt sich aus der Zeitkonstanten  $T_N = R_1 C$ .

Für die Beschaltung eines OV als Lag-Glied werden die Strukturen für Eingangs-Beschaltung und Rückführ-Beschaltung gegenüber dem Lead-Glied getauscht. Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Werte ist entsprechend. Eine Realisierung mit 2 Kondensatoren ist für Lead und Lag theoretisch möglich, führt aber beim OV auf eine „Slew-Rate“ Begrenzung.

## 4 Der RC-Teiler im Zeitbereich

Mit Gleichung (3.8) (Seite 12) gilt für den RC-Spannungs-Teiler (alle Anfangsbedingungen sind Null):

$$U_a(s) = U_e(s)H_{RC}(s) = U_e(s) \cdot K \frac{1 + sT_Z}{1 + sT_N} = \hat{U}_e \frac{1}{s} \cdot K \frac{1 + sT_Z}{1 + sT_N} = \hat{U}_e K \left\{ \underbrace{\frac{1/T_N}{s(s + 1/T_N)}}_{\text{Nr. 7}} + \frac{T_Z}{T_N} \underbrace{\frac{1}{s + 1/T_N}}_{\text{Nr. 5}} \right\} \quad (4.1)$$

Damit ergibt sich als Ausgangsspannung im Zeitbereich:

$$u_a(t) = \hat{U}_e K \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{T_N}} + \frac{T_Z}{T_N} e^{-\frac{t}{T_N}} \right\} \sigma(t) = \hat{U}_e K \left\{ 1 + \frac{T_Z - T_N}{T_N} e^{-\frac{t}{T_N}} \right\} \sigma(t) \tag{4.2}$$

Die Berechnung zeigt, daß nur eine e-Funktion im Zeitbereich vorkommt. Dies ist in Übereinstimmung mit der einen möglichen Anfangs-Bedingung und der OV Realisierung mit einem Kondensator.

Die Sprungantworten für das Lead und das Lag Glied sind in den Bildern 4.1 & 4.2 dargestellt.

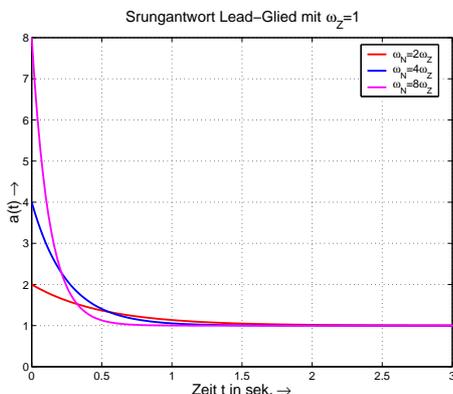


Bild 4.1: Sprungantwort Lead, differenzierendes Verhalten

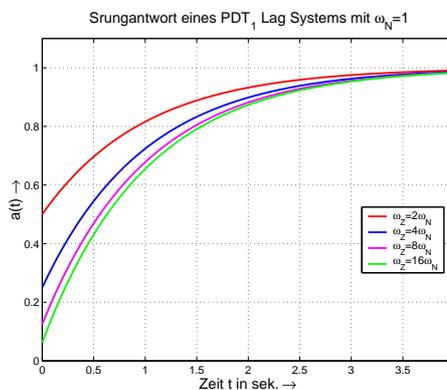


Bild 4.2: Sprungantwort Lag, integrierendes Verhalten

Beim Lead-Glied in Bild 4.1 ist  $T_Z$  konstant und  $T_N$  wird geändert. Dadurch ändert sich auch die jeweilige Charakteristische Gleichung. Deshalb haben die e-Funktionen der Sprungantwort  $a(t)$  jeweils unterschiedliche Zeitkonstanten.

### 4.1 Anfangs-Wert und End-Wert

Aus dem Anfangs-Wert Theorem  $u_a(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \{u_a(t)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \{sU_a(s)\}$  folgt für die Sprungantwort  $a(t)$  mit  $U_a(s) = H(s) \cdot U_e(s)$  und  $u_e(t) = \sigma(t) \iff U_e(s) = 1/s$

$$a(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \{|H(s)|\} = |H(\infty)| \quad \text{Anfangs-Wert} \tag{4.3}$$

Entsprechendes gilt für das End-Wert Theorem  $u_a(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{u_a(t)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \{sU_a(s)\}$ . Daraus folgt für die Sprungantwort  $a(t)$  und die Übertragungsfunktion  $H(s)$

$$a(\infty) = |H(0)| \quad \text{End-Wert} \tag{4.4}$$

Bild 4.3 zeigt diese Zusammenhänge am Beispiel des Lead Systems mit  $\omega_N = 4\omega_Z; \omega_Z = 1$ .

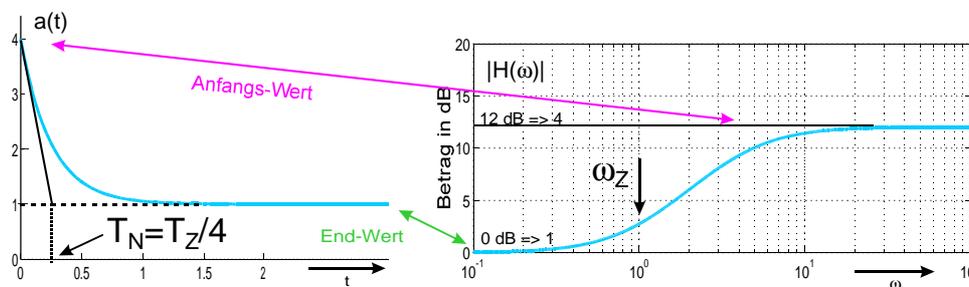


Bild 4.3: Anfangs- und Endwert-Theorem

### 4.1.1 Abgleich der Tastspitze beim Oszilloskop

Aus Gleichung (4.1) (Frequenz-Bereich) und Gleichung (4.2) (Zeit-Bereich) sieht man sofort, daß die Tastspitze als frequenz-unabhängiger proportionaler Teiler dann wirkt, wenn beide Zeitkonstanten gleich sind.

$$T_Z = T_N \rightsquigarrow T_1 = R_1 C_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2) \rightsquigarrow C_1 (R_1 + R_2) = R_2 (C_1 + C_2) \rightsquigarrow T_2 = C_2 R_2 = T_1 \quad (4.5)$$

Bei der Tastspitze müssen also die beiden Zeitkonstanten  $T_1 = T_2$  sein. Im praktischen Fall wird dies erreicht durch Abgleich von  $C_{\text{comp}}$ , Bild 3.9 (Seite 11). Aufgrund des Anfangs-End-Wert Theorems ist einsichtig, daß sich der Abgleich auch auf den Frequenzgang auswirkt, Bild 4.4.

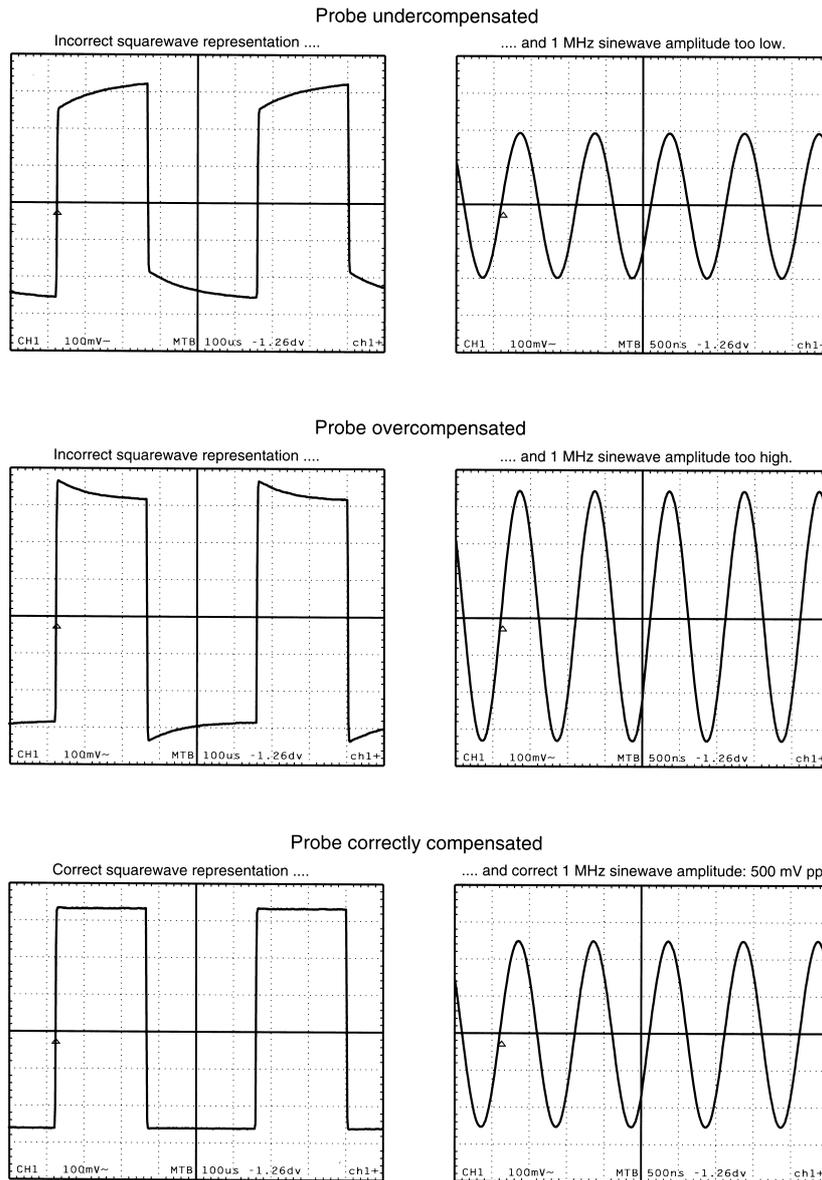


Bild 4.4: Auswirkung des Abgleichs der Tastspitze eines Oszilloskops im Zeit- und Frequenz-Bereich

## 5 Partialbruch Zerlegung

Ein allgemeines System, das durch eine gewöhnliche DGL mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden kann, hat eine Übertragungs- bzw. System-Funktion in einer gebrochen rationalen Form.

$$H(s) = \frac{\sum_{i=1}^m b_i s^i}{\sum_{i=1}^n a_i s^i} \quad a_n = 1 \quad m \leq n \quad (5.1)$$

Gemäß eines fundamentalen Satzes der Algebra hat das Nennerpolynom  $n$  Wurzeln (Lösungen).

$$\sum_{i=1}^n a_i s^i = 0 \quad (5.2)$$

Einige dieser Wurzeln können auch mehrfach sein. Die Lösungen von Gleichung (5.2) seien wie folgt:

Zahl der Wurzeln	Wert
$n_1$	$-p_1$
$n_2$	$-p_2$
$\vdots$	$\vdots$
$n_r$	$-p_r$

mit  $\sum_{i=1}^r n_i = n$  (5.3)

Damit läßt sich das Nennerpolynom in Produktform darstellen.

$$\sum_{i=1}^n a_i s^i = \prod_{i=1}^r (s + p_i)^{n_i} \quad (5.4)$$

Gleichung (5.1) wird damit:

$$H(s) = \frac{\sum_{i=1}^m b_i s^i}{\prod_{i=1}^r (s + p_i)^{n_i}} \quad (5.5)$$

Da nun der Nenner in Produktform vorliegt, kann für  $H(s)$  die Partialbruch Darstellung angegeben werden.

$$H(s) = b_m + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_{ik}}{(s + p_i)^k}; \quad b_m = 0 \quad \text{für } m < n \quad (5.6)$$

Die einzelnen Koeffizienten  $c_{ik}$  erhält man zu:

$$c_{ik} = \frac{1}{(N_i - k)!} \frac{d^{N_i - k}}{ds^{N_i - k}} \left\{ (s + p_i)^{N_i} H(s) \right\} \Big|_{s = -p_i} \quad (5.7)$$

Die Koeffizienten  $c_{ik}$  heißen die Residuen von  $H(s)$ .

Treten keine mehrfachen Pole auf, vereinfacht sich die Partialbruchzerlegung erheblich. Zu einem komplexen Pol gibt es immer auch den konjugiert komplexen Pol. Es gilt dann für  $m < n$ :

$$H(s) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s + p_i} \quad \text{mit} \quad c_i = (s + p_i) H(s) \Big|_{s = -p_i} \quad (5.8)$$

Mit Hilfe der Partialbruch-Zerlegung werden die Ausdrücke im Bild-Bereich in einfache Teile zerlegt. Diese findet man dann in den Laplace-Tabellen und gewinnt damit (unter Anwendung des Linearitätssatzes) die Lösung im Zeitbereich.

## 6 Tabellen zur Laplace-Transformation

Nr.	$F(s)$	$f(t)$ für $t \geq 0 \rightsquigarrow f(t)\sigma(t)$
1	1	$\delta(t)$ Einheits-Impuls
2	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$ Einheits-Sprung
3	$\frac{1}{s^2}$	$t$ Einheits-Rampe
4	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n$ ; $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
5	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$
6	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$t^n e^{-at}$
7	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$
8	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{at - 1 + e^{-at}}{a^2}$
9	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a} [e^{-at} - e^{-bt}]$
10	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a} [be^{-bt} - ae^{-at}]$
11	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} \left\{ 1 + \frac{1}{a-b} [be^{-at} - ae^{-bt}] \right\}$
12	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sin(\omega_0 t)$
13	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\cos(\omega_0 t)$
14	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-at} \sin(\omega_0 t)$
15	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-at} \cos(\omega_0 t)$
	<b>Bei 16, 17 &amp; 18 ist:</b>	$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1-d^2}$ ; $d < 1$
16	$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}$	$\frac{\omega_0^2 e^{-d\omega_0 t}}{\omega_d} \sin(\omega_d t)$
17	$\frac{s}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}$	$\frac{e^{-d\omega_0 t}}{\omega_d} [d\omega_0 \sin(\omega_d t) + \omega_d \cos(\omega_d t)]$
18	$\frac{\omega_0^2}{s \cdot (s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2)}$	$1 - \frac{e^{-d\omega_0 t}}{\omega_d} [d\omega_0 \sin(\omega_d t) + \omega_d \cos(\omega_d t)]$

## Literatur

- [1] Kamen, E.W.; Heck, B.S.: *Fundamentals of Signals and Systems Using MATLAB*, Prentice-Hall, 1997
- [2] Carlson, G.E.: *Signal and Linear System Analysis with MATLAB*, Wiley, 2nd ed. 1998
- [3] Kraniuskas, P.: *Transforms in Signals and Systems*, Addison-Wesley, 1992
- [4] Bracewell, R.N.: *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill, 2nd. ed., rev. 1986
- [5] Poularikas, A.D., Seely, S.: *Signals and Systems*, PSW-Kent, 2nd. ed. 1991
- [6] DiStefano III, J.J.; Stubberud, A.R.; Williams, I.J.: *Feedback and Control Systems*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1967
- [7] Greuel, O.: *Mathematische Ergänzungen und Aufgaben für Elektrotechniker*, Hanser, 10. A. 1983
- [8] Oppenheim, A.V., Willsky, A.S.: *Signale und Systeme*, VCH, 1989
- [9] Ameling, W.: *Laplace-Transformation*, Bertelsmann, 1975
- [10] Dlabka, M.: *Vorlesungs-Skript „Regelungstechnik“*, FH Telekom Leipzig & FHTW Berlin, 2003
- [11] Fluke Corporation, o.A.: *ABC's of Oscilloscopes*, 1994
- [12] Landgraf, Ch.; Schneider, G.: *Elemente der Regelungstechnik*, Springer, 1970
- [13] Frey, Th.; Bossert, M.: *Signal- und Systemtheorie*, Teubner, 2004
- [14] Scheithauer, R.: *Signale und Systeme*, Teubner, 2. A., 2005
- [15] Girod, B.; Rabenstein, R.; Stenger, A.: *Einführung in die Systemtheorie*, Teubner, 2. A., 2003
- [16] Tietze, U.; Schenk, Ch.: *Halbleiter Schaltungstechnik*, Springer, 12. A., 2002
- [17] Malvino, A.P.: *Electronic Principles*, McGraw Hill, 4th ed, 1989
- [18] Schultz, W.: *Messen und Prüfen mit Rechtecksignalen*, Philips Technische Bibliothek, 1966