Einfache RC-Glieder zur Formung von Impulsen

DK 621.372.5:621.319.4:621.316.8

Die Eigenschaften der üblichen *RC*-Differentiations-, Integrations- und Koppelglieder können aus der Theorie des allgemeinen Spannungsteilers abgeleitet werden. Besonders einfach lassen sich diese *RC*-Glieder mit der Laplacetransformation[1]) behandeln.

1. Der allgemeine frequenzabhängige Spannungsteiler

Bild 1 zeigt den allgemeinen frequenzabhängigen Spannungsteiler. Wendet man den Maschensatz auf die Maschen *0*, *1* und *2* an, so folgt

$$u(t) = R_1 \cdot i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t) \qquad (1)$$

Zwischen dem Gesamtstrom $i(t)$ und den Teilströmen $i_k(t)$ und $i_k{}^*(t)$ $(k = 1, 2)$ besteht nach dem Knotensatz der Zusammenhang

$$i(t) = i_1(t) + i_1{}^*(t) = i_2(t) + i_2{}^*(t) = i_k(t) + i_k{}^*(t) \qquad (2)$$

Darin ist $i_k(t)$ der über den Widerstand R_k und $i_k{}^*(t)$ der durch den Kondensator C_k fließende Strom $(k = 1, 2)$.

Wegen der Gleichheit der Spannung $u_k(t)$ am Widerstand R_k und am Kondensator C_k gilt nach dem Maschensatz

$$u_k(t) = R_k \cdot i_k(t) = \frac{q_k{}^*(t)}{C_k} = \frac{\int\limits_0^t i_k{}^*(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi}{C_k} \quad (k = 1, 2) \qquad (3)$$

In Gl. (3) bedeutet $q_k{}^*(t) = \int\limits_0^t i_k{}^*(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi$ die von dem Kondensator C_k während der Zeit t gespeicherte Ladung und $i_k{}^*(t)$ den Ladestrom des Kondensators.

Differenziert man Gl. (3) nach der Zeit t, so ergibt sich der Ladestrom $i_k{}^*(t)$ zu

$$i_k{}^*(t) = R_k \cdot C_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} i_k(t) = \tau_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} i_k(t) \qquad (4)$$

Zur Abkürzung wurde in diese Gleichung die Zeitkonstante

$$\tau_k = R_k \cdot C_k \quad (k = 1, 2) \qquad (5)$$

eingeführt.

Setzt man Gl. (4) in Gl. (2) ein, so folgt

$$i(t) = \tau_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} i_k(t) + i_k(t) \qquad (6)$$

oder

$$\tau_1 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} i_1(t) + \frac{1}{\tau_1} i_1(t)\right] = \tau_2 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} i_2(t) + \frac{1}{\tau_2} i_2(t)\right] \qquad (7)$$

Gesucht ist die Ausgangsspannung $u_1(t) = R_1 \cdot i_1(t)$ des allgemeinen Spannungsteilers im Bild 1. $u_1(t)$ kann aus dem aus den Gleichungen

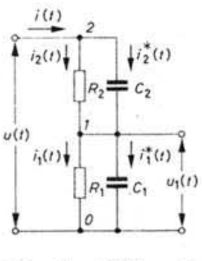

Bild 1. Allgemeiner Spannungsteiler

(1) und (7) bestehenden Differentialgleichungssystem unter Beachtung von $u_k(t) = R_k \cdot i_k(t)$ berechnet werden. Man erhält für die Spannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) + u_2(t) \\ 0 &= -C_1\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} u_1(t) + \frac{1}{\tau_1} u_1(t)\right] + C_2\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} u_2(t) + \frac{1}{\tau_2} u_2(t)\right] \end{aligned} \qquad (8)$$

[1]) s.a. Beitragsreihe „Einführung in die Laplacetransformation" in der FUNK-TECHNIK Bd. 16 (1961)

Zur Zeit $t \leq 0$ seien die Ströme $i_k(t)$ und damit die Spannungen $u_k(t) = R_k \cdot i_k(t)$ gleich Null. Die zum Differentialgleichungssystem Gl. (8) gehörenden Anfangsbedingungen sind also

$$u_k(t) = 0 \text{ für } t = 0 \; (k = 1, 2) \qquad (9)$$

Unter Beachtung der Anfangsbedingungen Gl. (9) gelten folgende Korrespondenzen der Laplacetransformation:

$$\begin{aligned} u_k(t) &\leftrightarrow \overline{u}_k(p) = \overline{u}_k \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} u_k(t) &\leftrightarrow p \cdot \overline{u}_k(p) = p \cdot \overline{u}_k \end{aligned} \qquad (10)$$

Das Differentialgleichungssystem (8) geht nach Ausführung der Laplacetransformation unter Beachtung von Gl. (10) in das algebraische Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \overline{u} &= \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \\ 0 &= -C_1\left(p + \frac{1}{\tau_1}\right)\overline{u}_1 + C_2\left(p + \frac{1}{\tau_2}\right)\overline{u}_2 \end{aligned} \qquad (11)$$

über. Die Auflösung des Gleichungssystems (11) nach $\overline{u}_1$ ergibt

$$\overline{u}_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{p + \frac{1}{\tau_2}}{p + \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 (C_1 + C_2)}} \overline{u} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \overline{f}(p) \qquad (12)$$

Zur Abkürzung wird die Zeitkonstante

$$\tau = \frac{R_1 \cdot R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2} \qquad (13)$$

eingeführt. Beachtet man

$$\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau} = \frac{1}{R_2 \cdot C_2} - \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 (C_1 + C_2)} = \frac{\tau_1 - \tau_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C_2 (C_1 + C_2)}, \qquad (14)$$

so kann in Gl. (12) die Unterfunktion $\overline{f}(p)$ noch etwas umgeformt werden

$$\begin{aligned} \overline{f}(p) &= \frac{p + \frac{1}{\tau_2}}{p + \frac{1}{\tau}} \overline{u} = \frac{p + \frac{1}{\tau} + \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau}\right)}{p + \frac{1}{\tau}} \overline{u} \\ &= \overline{u} + \frac{\tau_1 - \tau_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C_2 (C_1 + C_2)} \cdot \frac{\overline{u}}{p + \frac{1}{\tau}} \end{aligned} \qquad (15)$$

Nach dem Faltungssatz der Laplacetransformation gilt die Korrespondenz

$$\frac{\overline{u}}{p + \frac{1}{\tau}} \leftrightarrow \int\limits_0^t u(\xi) \cdot \mathrm{e}^{\frac{\xi - t}{\tau}} \,\mathrm{d}\,\xi \qquad (16)$$

Die Rücktransformation der Unterfunktion

$$\overline{u}_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \overline{f}(p)$$

in den Oberbereich ergibt die gesuchte Ausgangsspannung

$$u_1(t) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\left[u(t) + \frac{\tau_1 - \tau_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot C_2 (C_1 + C_2)} \int\limits_0^t u(\xi) \cdot \mathrm{e}^{\frac{\xi - t}{\tau}} \,\mathrm{d}\,\xi\right] \qquad (17)$$

des allgemeinen Spannungsteilers nach Bild 1.