

Amplituden-, Doppelseitenband- und Einseitenbandmodulation

Dipl.-Phys. Jochen Bauer

31.05.2013

Einführung und Motivation

Die Behandlung von Modulationsverfahren erfolgt in den Ingenieurwissenschaften üblicherweise mit Hilfe der Fourier-Transformation oder Fourier-Reihen. Da diese mathematischen Hilfsmittel dem Praktiker meistens nicht zur Verfügung stehen, soll in diesem Artikel eine Einführung in die Amplituden-, Doppelseitenband- und Einseitenbandmodulation gegeben werden, die ohne diese Methoden auskommt. Anhand einfacher trigonometrischer Berechnungen und mit ausgewählten Beispielen soll ein grundlegendes Verständnis der erwähnten Modulationsverfahren vermittelt werden. Der darüber hinaus interessierte Leser sei auf entsprechende weiterführende Literatur, insbesondere [1], [2] und [3], verwiesen.

Die Aufgabe der Modulation ist es, einem hochfrequenten Trägersignal (in der Regel eine elektromagnetische Schwingung bzw. Welle, hier als HF-Signal bezeichnet) die zu übermittelnden Informationen "einzuprägen". In der analogen Radiotechnik handelt es sich bei diesen Informationen meistens um ein niederfrequentes Tonsignal, im Folgenden als NF-Signal bezeichnet. Es sollen hier der Einfachheit halber periodische NF-Signale, z.B. einzelne Töne eines Musikinstrumentes, betrachtet werden. Der besseren Übersicht wegen sollen zunächst einige verwendete Symbole und Formelzeichen an dieser Stelle zusammengefasst werden.

$u_{\text{HF}}(t)$: HF-Signalspannung (moduliert)

$u_{\text{NF}}(t)$: NF-Signalspannung

$u_{\text{TR}}(t)$: Trägersignalspannung (unmoduliert)

Ω : Kreisfrequenz des hochfrequenten Trägersignals

ω : Kreisfrequenz des periodischen NF-Signals

m : Modulationsgrad

Das NF-Signal und dessen Zusammensetzung

Das NF-Signal $u_{\text{NF}}(t)$ soll durch geeignete Normierung auf den Bereich zwischen -1V und $+1\text{V}$ beschränkt werden und gerade sein, d.h. $u_{\text{NF}}(-t) = u_{\text{NF}}(t)$. Weiterhin soll $u_{\text{NF}}(t)$ keinen Gleichspannungsanteil enthalten. Wie bereits erwähnt, betrachten wir periodische NF-Signale mit einer Periode $T = 2\pi/\omega$, wobei ω die Kreisfrequenz des NF-Signals ist. Jedes periodische NF-Signal setzt sich aus einer Sinus- bzw. Cosinus-förmigen Grundschiwingung und ebenfalls Sinus- bzw. Cosinus-förmigen Oberschwingungen zusammen, wobei die Frequenzen der Oberschwingungen jeweils ganze Vielfache der Frequenz der Grundschiwingung sind. Im Falle eines geraden NF-Signals (wie hier angenommen) kommen nur Cosinus-förmige Schwingungen vor. Ist, wie angenommen, das NF-Signal ein Ton eines Musikinstrumentes, so entscheidet das Verhältnis der Amplituden der Oberschwingungen zueinander und zur Grundschiwingung über den Klang, d.h. dieses Verhältnis ist charakteristisch für das jeweilige Instrument.

Nach dem bisher gesagten lässt sich das angenommene NF-Signal (genauer: die NF-Signalspannung) $u_{\text{NF}}(t)$ darstellen als:

$$u_{\text{NF}}(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + \dots + a_N \cos(N\omega t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega t) \quad (1)$$

Wobei a_n die (ggf. auch negativen) Amplituden der Grundschiwingung ($n = 1$) bzw. der Oberschwingungen ($n > 1$) sind. Es sei angemerkt, dass je nach Signalform nicht immer alle Oberschwingungen vorkommen müssen, d.h. einige a_n können auch null sein. In der obigen Darstellung wurden Oberschwingungen bis zur Frequenz $N\omega$ berücksichtigt. In der Praxis (insbesondere in der Radiotechnik) ist die Bandbreite des NF-Signals stets begrenzt, d.h. es sind immer nur Oberschwingungen bis zu einer maximalen Oberschwingungsfrequenz $N\omega$ zu berücksichtigen. Es sei hier erwähnt, dass der Fall $N \rightarrow \infty$, d.h. die Berücksichtigung unendlich vieler Oberschwingungen direkt zur Theorie der Fourier Reihen und der Fourier Transformation führt. Der Leser sei hierzu auf die bereits erwähnte weiterführende Literatur verwiesen.

Als Beispiel betrachten wir hier eine NF-Signalspannung bestehend aus einer Grundschiwingung und zwei Oberschwingungen gemäß

$$u_{\text{NF}}(t) = \cos(\omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) \quad (2)$$

Die Amplituden a_2 und a_4 sind hier null. Die Amplitude a_3 ist negativ, d.h. diese Oberschwingung ist um 180° gegenüber der Grundschiwingung gedreht. Der prinzipielle zeitliche Verlauf dieser NF-Signalspannung ist in Abbildung 1 dargestellt.

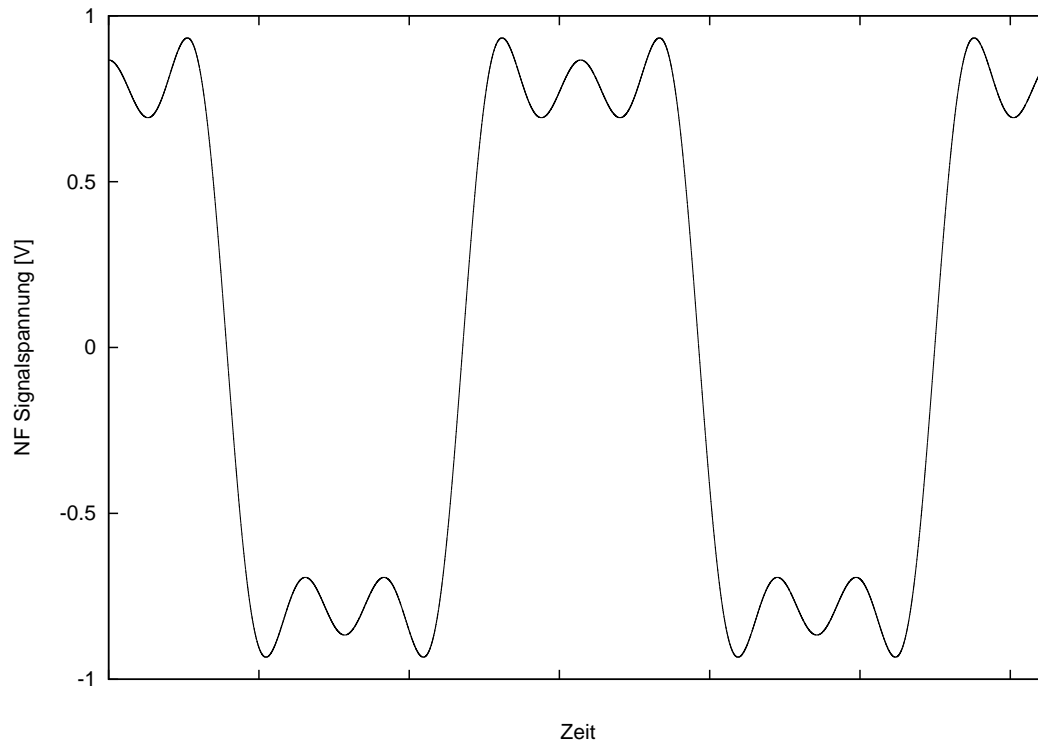


Abbildung 1: NF-Signal, Grundschiwingung mit zwei Oberschwingungen

Amplitudenmodulation

Das (unmodulierte) HF-Trägersignal soll sich genau wie das NF-Signal zwischen -1V und $+1\text{V}$ bewegen. Die Sendeamplituden werden letztendlich durch den Senderverstärker und die Ausgangsstufe bestimmt, so dass bei der Betrachtung der Modulation eine Normierung auf diesen Bereich möglich und auch sinnvoll ist. Im Gegensatz zum NF-Signal soll das HF-Trägersignal keinerlei Oberschwingungen enthalten, es soll sich also um eine reine Sinus- oder Cosinusfunktion mit der Kreisfrequenz Ω handeln. Wir wählen als Träger eine Cosinus-Funktion, d.h.

$$u_{\text{TR}}(t) = \cos(\Omega t)$$

Die einfachste und historisch älteste Modulationsart ist die Amplitudenmodulation. Hierbei bestimmt das NF-Signal die Amplitude des HF-Signals. Als Randbedingung gilt, dass die Amplitude des HF-Signals dabei immer positiv bleiben muss, d.h. es dürfen keine Phasensprünge im resultierenden HF-Signal auftreten. Die Amplitudenmodulation lässt sich unter diesen Voraussetzungen schreiben als

$$u_{\text{HF}}(t) = (1 + m \cdot u_{\text{NF}}(t)) \cdot \cos(\Omega t)$$

wobei der Parameter m den Modulationsgrad darstellt. Für $m = 0$ findet keine

Modulation statt, bei $m = 0.5$ ist der Modulationsgrad 50% und $m = 1$ führt zu einem Modulationsgrad von 100%. Dies gilt alles unter der Voraussetzung, dass NF-Signal und Träger auf den Bereich von -1V bis +1V normiert sind. Das resultierende, modulierte HF Signal für das als Beispiel verwendete NF-Signal (2) für einen Modulationsgrad von 50% ist in Abbildung 2 dargestellt.

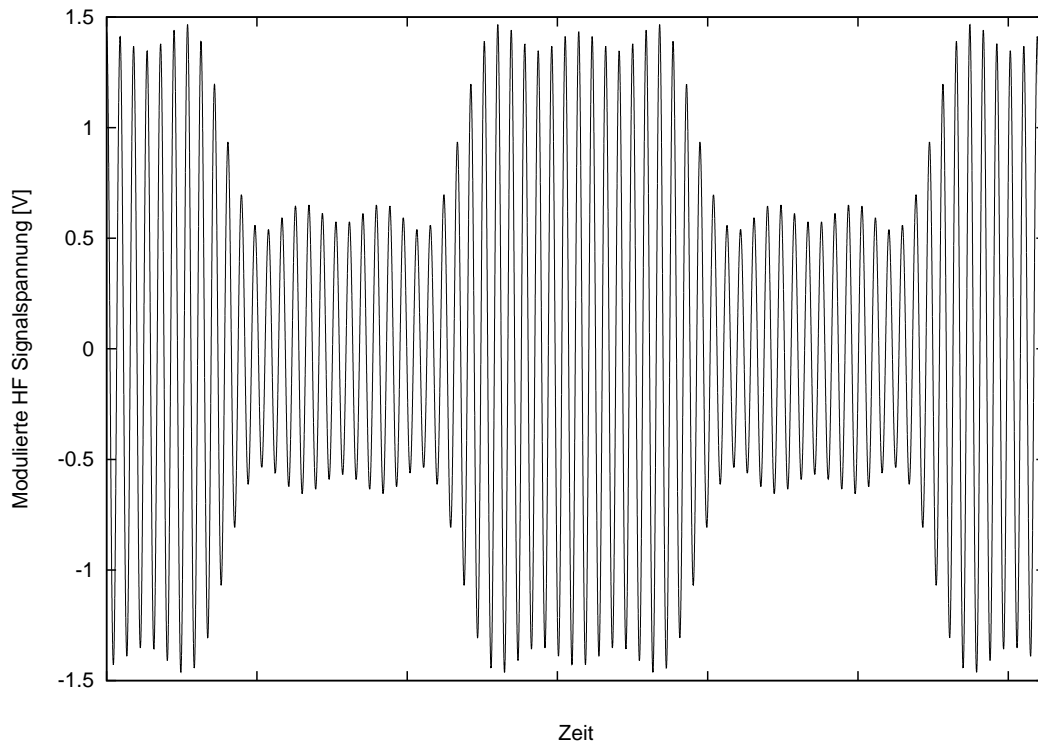


Abbildung 2: Amplitudenmoduliertes HF-Signal

Mit (1) folgt dann unmittelbar

$$\begin{aligned}
 u_{\text{HF}}(t) &= \left(1 + m \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega t) \right) \cdot \cos(\Omega t) \\
 &= \cos(\Omega t) + m \sum_{n=1}^N a_n \left(\cos(n\omega t) \cdot \cos(\Omega t) \right)
 \end{aligned}$$

Für die weitere Umformung dieser und weiterer Gleichungen wird eine Trigonometrische Identität benötigt, die sich in den meisten trigonometrischen Formelsammlungen (z.B. [4]) findet. Das Produkt aus zwei Cosinus-Funktionen $\cos(x)$ und $\cos(y)$ lässt sich darstellen als

$$\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y)) \quad (3)$$

Dies auf die obige Gleichung angewendet ergibt zunächst

$$u_{\text{HF}}(t) = \cos(\Omega t) + m \sum_{n=1}^N a_n \frac{1}{2} (\cos(\Omega t - n\omega t) + \cos(\Omega t + n\omega t))$$

Teilen wir nun diese Summe auf in eine Summe über die Frequenzbestandteile $\Omega - n\omega$ und eine Summe über die Frequenzbestandteile $\Omega + n\omega$, so ergibt sich als Endergebnis

$$u_{\text{HF}}(t) = \cos(\Omega t) + \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^N a_n \cos((\Omega - n\omega)t) + \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^N a_n \cos((\Omega + n\omega)t) \quad (4)$$

In dieser Darstellung sind neben der Trägerschwingung $\cos(\Omega t)$ sofort die beiden Seitenbänder

$$u_{\text{LSB}}(t) = \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^N a_n \cos((\Omega - n\omega)t)$$

und

$$u_{\text{USB}}(t) = \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^N a_n \cos((\Omega + n\omega)t)$$

zu erkennen. Dabei wurden die Bezeichnungen LSB für das untere Seitenband (Lower Side Band) und USB für das Obere Seitenband (Upper Side Band) verwendet. Die Grundschwingung bzw. Oberschwingungen des NF-Signals mit der Frequenz ω erzeugen im unteren Seitenband HF-Komponenten mit der Frequenz $\Omega - n\omega$ und im oberen Seitenband HF-Komponenten mit der Frequenz $\Omega + n\omega$. Es ist hier unmittelbar der Zusammenhang zwischen der Bandbreite des NF-Signals und der Bandbreite des modulierten HF-Signals zu sehen. Dieses sich aus (4) ergebende Frequenzspektrum eines amplitudenmodulierten HF-Signals ist schematisch in Abbildung 3 dargestellt.

Doppelseitenband- und Einseitenbandmodulation

Da der Träger $u_{\text{TR}}(t) = \cos(\Omega t)$ selber keinerlei Informationen über das NF-Signal enthält liegt der Gedanke nahe, ihn im Sender zu unterdrücken und nicht mit auszustrahlen. Der unmittelbare Vorteil ist eine höhere Effizienz des Senders, da die zur Verfügung stehende Sendeleistung nun voll auf die beiden Seitenbänder mit Informationen über das NF-Signal konzentriert werden kann. Man gelangt damit

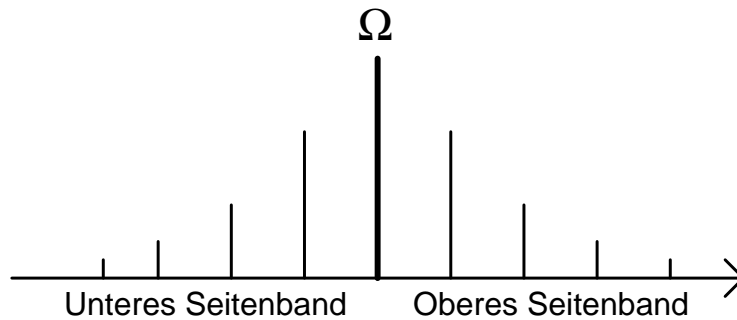


Abbildung 3: HF Spektrum bei Amplitudenmodulation

von der Amplituden- zur Doppelseitenbandmodulation, deren Frequenzspektrum in Abbildung 4 skizziert ist.

Den Zeitverlauf des Hochfrequenzsignals $u_{\text{DSB}}(t)$ für die Doppelseitenbandmodulation (DSB = Double Side Band) erhält man einfach aus Gleichung (4) durch Weglassen des “Träger-Terms” $\cos(\Omega t)$ zu

$$u_{\text{DSB}}(t) = \frac{1}{2}m \sum_{n=1}^N a_n \cos((\Omega - n\omega)t) + \frac{1}{2}m \sum_{n=1}^N a_n \cos((\Omega + n\omega)t)$$

Mit einer zum vorherigen Abschnitt analogen Rechnung zeigt man leicht, dass dies einfach einer Multiplikation von Modulationsgrad m , NF-Signal und Träger, also

$$u_{\text{DSB}}(t) = m \cdot u_{\text{NF}}(t) \cdot \cos(\Omega t)$$

entspricht. Üblicherweise wird in diesem Fall daher der Modulationsgrad auf $m = 1$ gesetzt. Der Zeitverlauf des HF-Signals in Doppelseitenbandmodulation für das bisher als Beispiel verwendete NF-Signal (2) ist in Abbildung 5 gezeigt.

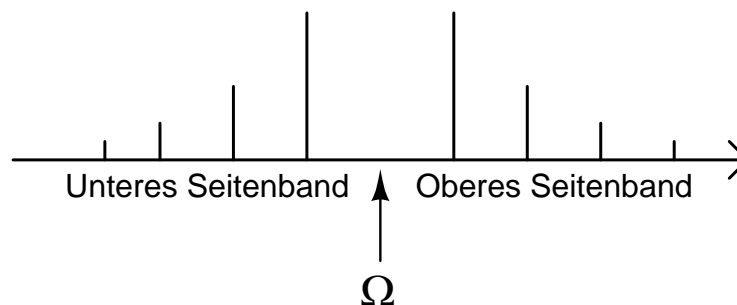


Abbildung 4: HF Spektrum bei Doppelseitenbandmodulation

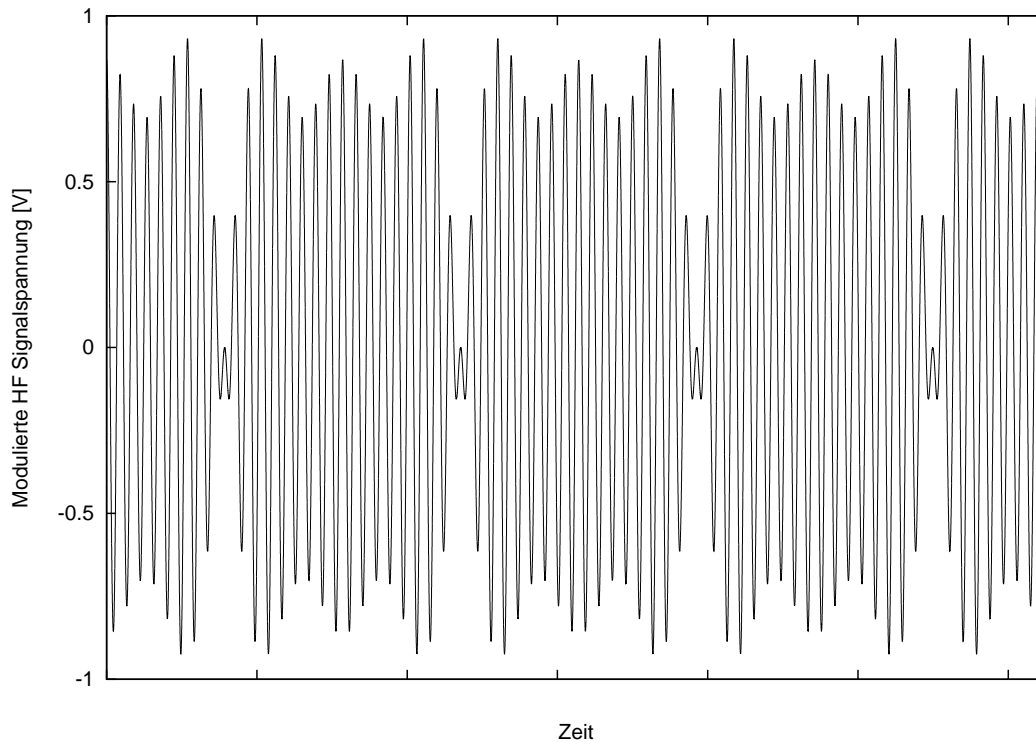


Abbildung 5: HF-Signal mit Doppelseitenband Modulation

Aus Gleichungen (1) und (4) folgt unmittelbar, dass das obere Seitenband u_{USB} die selben Informationen über das NF-Signal wie das untere Seitenband u_{LSB} enthält. Es liegt daher Nahe, nicht nur den Träger u_{TR} im Sender zu unterdrücken, sondern auch noch eines der beiden Seitenbänder zu eliminieren und die Ausstrahlung auf das andere Seitenband zu beschränken. Man kann damit die Effizienz des Senders noch weiter steigern und außerdem die Bandbreite des HF-Signals halbieren. Man gelangt damit zur Einseitenbandmodulation, meistens als “SSB” für “Single Side Band” abgekürzt.

Der Zeitverlauf des Hochfrequenzsignals für die Einseitenbandmodulation mit unterem Seitenband u_{LSB} bzw. oberem Seitenband u_{USB} ist durch die bereits aus dem vorherigen Abschnitt bekannten Gleichungen

$$u_{\text{LSB}}(t) = \frac{1}{2}m \sum_{n=1}^N a_n \cos((\Omega - n\omega)t) \quad (5)$$

und

$$u_{\text{USB}}(t) = \frac{1}{2}m \sum_{n=1}^N a_n \cos((\Omega + n\omega)t) \quad (6)$$

gegeben. Der Modulationsgrad wird hier ebenfalls üblicherweise auf $m = 1$ gesetzt. Der Zeitverlauf des HF-Signals in Einseitenbandmodulation mit oberem Seitenband für das bisher als Beispiel verwendete NF-Signal (2) ist in Abbildung 6 gezeigt.

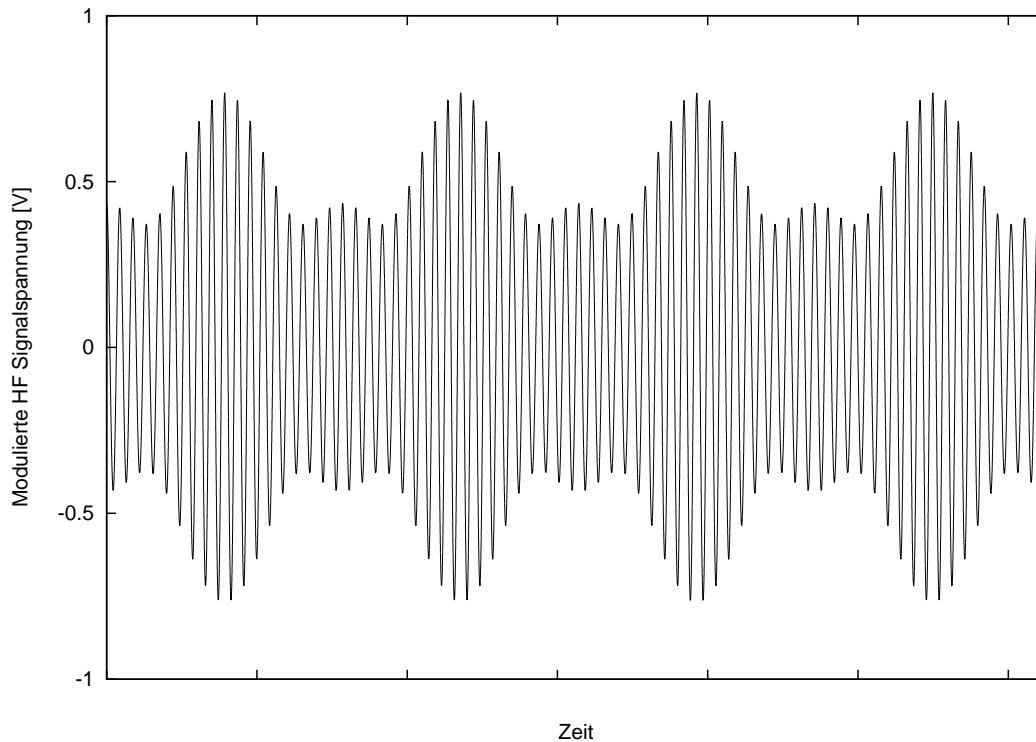


Abbildung 6: HF-Signal mit Einseitenband Modulation, Oberes Seitenband

Demodulation

Die Demodulation des amplitudenmodulierten HF-Signals kann am einfachsten durch Einweg-Gleichrichtung mit einer (Detektor-)Diode und anschließender Unterdrückung der HF mit Hilfe eines Tiefpassfilters erfolgen. Im einfachsten Fall kann dieser Tiefpass durch die mechanische Trägheit des Lautsprechers realisiert werden, dem das gleichgerichtete HF-Signal angeboten wird. Dieses Verfahren zur Amplituden-Demodulation kann auch als Hüllkurvendetektion bezeichnet werden.

Die Demodulation von Doppel- und Einseitenband HF-Signalen kann im Gegensatz zur Amplitudenmodulation nun nicht mehr über Hüllkurvendetektion erfolgen. Dies zeigt bereits ein kurzer Blick auf die Zeitverläufe der entsprechenden HF-Signale (Abbildungen 5 und 6). Es ist in diesem Fall vielmehr notwendig,

die Trägerschwingung u_{TR} im Empfänger mit Hilfe eines Oszillators wieder zu erzeugen. Die Demodulation erfolgt damit sowohl bei Doppel- als auch Einseitenbandmodulation mit einem Multiplizierer, der den erzeugten Träger mit dem HF-Signal multipliziert [3]. Wir wollen dies zunächst im Falle der Einseitenbandmodulation näher betrachten.

Wir gehen von einem Träger u_{TR} aus, der im Empfänger frequenzrichtig, aber möglicherweise um einen Winkel φ phasenverschoben zum Originalträger erzeugt wurde und auf den Bereich -1V bis $+1\text{V}$ normiert ist. D.h.

$$u_{\text{TR}}(t) = \cos(\Omega t + \varphi)$$

Die Demodulation der Einseitenbandmodulation mit oberem Seitenband erfolgt damit durch Bildung von

$$u_{\text{USB}}(t) \cdot u_{\text{TR}}(t) = u_{\text{USB}}(t) \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$$

Einsetzen von $u_{\text{USB}}(t)$ aus Gleichung (6) ergibt

$$\begin{aligned} u_{\text{USB}}(t) \cdot \cos(\Omega t + \varphi) &= \left(\frac{1}{2} m \sum_{n=1}^N a_n \cos((\Omega + n\omega)t) \right) \cdot \cos(\Omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^N a_n \left(\cos((\Omega + n\omega)t) \cdot \cos(\Omega t + \varphi) \right) \\ &= \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^N a_n \left(\cos(\Omega t + n\omega t) \cdot \cos(\Omega t + \varphi) \right) \end{aligned}$$

und unter Verwendung der bereits bekannten trigonometrischen Identität (3) lässt sich dies weiter umformen zu

$$u_{\text{USB}}(t) \cdot \cos(\Omega t + \varphi) = \frac{1}{4} m \sum_{n=1}^N a_n \left(\cos(n\omega t - \varphi) + \cos(2\Omega t + n\omega t + \varphi) \right)$$

Aufspalten der Summe ergibt nun letztendlich

$$u_{\text{USB}}(t) \cdot \cos(\Omega t + \varphi) = \frac{1}{4} m \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega t - \varphi) + \frac{1}{4} m \sum_{n=1}^N a_n \cos((2\Omega + n\omega)t + \varphi) \quad (7)$$

Um einen Eindruck vom Ergebnis dieser Produktdemodulation zu bekommen, ist der zeitliche Verlauf von $u_{\text{USB}}(t) \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$ für $\varphi = 0$ für das bisher als Beispiel verwendete NF-Signal (2) in Abbildung 7 gezeigt.

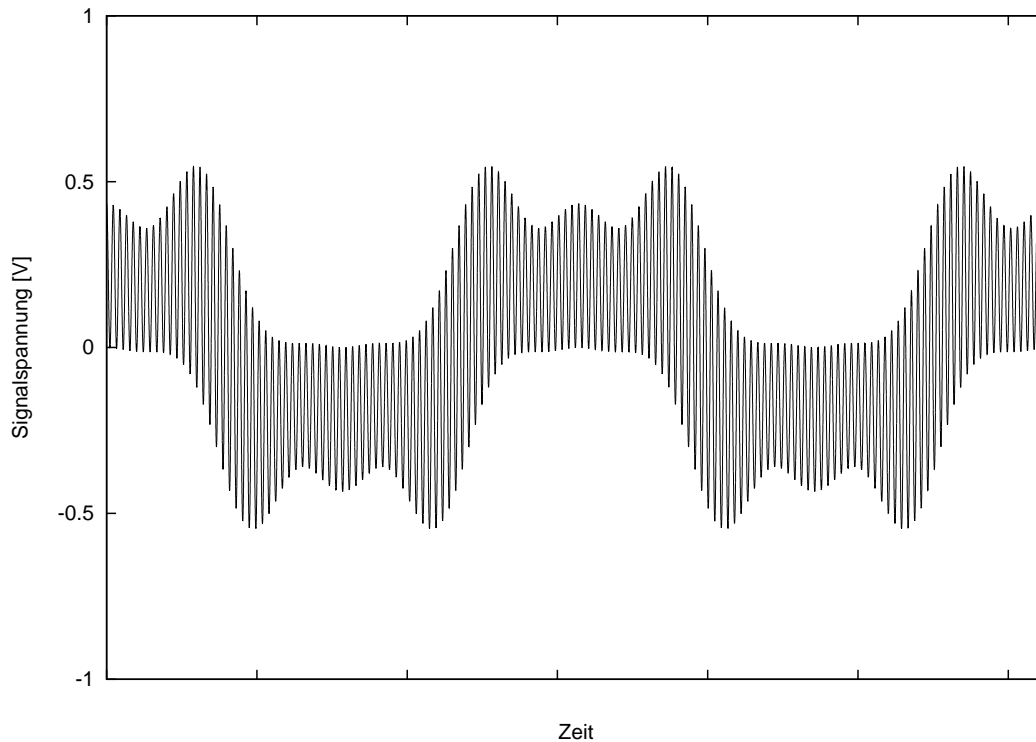


Abbildung 7: SSB Signal nach Produktdemodulation

Es ist dabei deutlich das ursprüngliche NF-Signal als “Mittelwert” einer HF-Schwingung zu erkennen. Eine Ausfilterung der HF Anteile mit einem Tiefpassfilter (der im einfachsten Fall wieder aus der mechanischen Trägheit des Lautsprechers bestehen kann) liefert wieder das ursprüngliche NF-Signal. Dies kann auch allgemein aus Gleichung (7) gefolgert werden: Die zweite Summe in dieser Gleichung enthält nur Frequenzanteile, die in der Größenordnung der doppelten Trägerfrequenz 2Ω liegen. Diese werden durch einen Tiefpass mit entsprechender oberer Grenzfrequenz unterdrückt und es verbleibt

$$u_{\text{USB}}(t) \cdot \cos(\Omega t + \varphi) = \frac{1}{4} m \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega t - \varphi)$$

Dieser Ausdruck ist bis auf den Vorfaktor, was aber durch eine entsprechende Verstärkung leicht ausgeglichen werden kann, und eine negative Phasenverschiebung um den Winkel $-\varphi$ identisch mit dem ursprünglichen NF-Signal (1). Diese Phasenverschiebung ist bei der Übertragung von Sprache und Musik irrelevant, da sie vom menschlichen Gehör nicht wahrgenommen wird.

Die Berechnungen für die Demodulation des unteren Seitenbandes sind völlig analog und es ergibt sich nach Tiefpassfilterung

$$u_{\text{LSB}}(t) \cdot \cos(\Omega t + \varphi) = \frac{1}{4}m \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega t + \varphi)$$

Der einzige Unterschied zur Demodulation des oberen Seitenbandes ist die nun positive Phasenverschiebung des Tonfrequenzsignals bei einem um φ phasenverschobenen, im Empfänger erzeugten Träger. Dies ist für das menschliche Gehör wiederum irrelevant. Es genügt also bei der Demodulation von Einseitenband HF-Signalen die Sprache oder Musik enthalten die frequenzrichtige Erzeugung der Trägerschwingung im Empfänger, eine phasenrichtige Erzeugung ist nicht notwendig. Dies ist bei der Doppelseitenbandmodulation anders, wie wir gleich sehen werden.

Die Demodulation der Doppelseitenband Modulation erfolgt, wie bereits erwähnt, ebenfalls durch Multiplikation der im Empfänger erzeugten Trägerschwingung mit dem Eingangs-HF-Signal, also

$$u_{\text{DSB}}(t) \cdot u_{\text{TR}}(t) = u_{\text{DSB}}(t) \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$$

Da aber $u_{\text{DSB}}(t) = u_{\text{USB}}(t) + u_{\text{LSB}}(t)$ ist, folgt mit den obigen Ergebnissen nach Tiefpassfilterung unmittelbar

$$u_{\text{DSB}}(t) \cdot \cos(\Omega t + \varphi) = \frac{1}{4}m \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega t - \varphi) + \frac{1}{4}m \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega t + \varphi)$$

Es ist klar, dass hier im Gegensatz zur Einseitenband-Demodulation der Träger nicht nur frequenz- sondern auch phasenrichtig im Empfänger erzeugt werden muss, da es sonst zu Auslöschungen im demodulierten NF-Signal kommen kann. Zum Beispiel würde im Falle von $\varphi = \pi/2$ das NF-Signal verschwinden, da in diesem Fall $\cos(n\omega t - \varphi) = -\cos(n\omega t + \varphi)$ ist.

Literatur

- [1] Meyberg, Vachenaer, *Höhere Mathematik II*, Springer, 1991
- [2] http://www.diru-beze.de/signale/skripte/2008/Fourier_Transformation_in_der_Nachrichtentechnik.pdf
- [3] http://www.diru-beze.de/modulationen/skripte/SuS_W0506/SSB_VSB.Modulation_WS0506.pdf
- [4] http://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie