

# Frequenz, Spektrum, Resonanz

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Physikalische Interpretation der Frequenz und des Spektrums</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Frequenzmessung mit dem Spektrum-Analyzer</b>	<b>2</b>
2.1	Idealisiertes System mit Grenzfrequenz $\omega_g$	2
2.2	System aus parallelgeschalteten Teilsystemen	2
2.2.1	Gleiche relative Breite der Filter	4
2.2.2	Zungenfrequenzmesser als Beispiel für einen Echtzeitanalysator	4
2.3	Vom parallelen zum seriellen Spektrum-Analysator	4
2.3.1	Umgeschaltete Filter	4
2.3.2	Durchstimmbares Bandpaß-Filter	5
2.3.3	Frequenzumsetzung in das Basisband	5
2.3.4	Frequenzumsetzung in eine Zwischenfrequenzlage	5
2.4	System mit $\infty$ vielen und infinitesimal schmalen parallelgeschalteten Teilsystemen	6
2.5	Das Zeit-Bandbreiten-Gesetz	6
2.5.1	Untere Grenze für die Einschwingzeit	7
2.5.2	Spektrum und Spektraldichte	7
2.5.3	Zeit und Frequenz sind reziprok zueinander.	7
2.5.4	Das Zeit-Bandbreiten-Gesetz der Nachrichtentechnik	8
<b>3</b>	<b>Definition des Begriffs Frequenz</b>	<b>8</b>
3.0.5	Widersprüche bei anderen Definitionen von Frequenz	8
3.1	Zusammenhang mit der Eigenschwingung des Meßgerätes	9
3.2	Resonanz als dominierendes Prinzip in der Übertragungstechnik	9
3.2.1	Walsh-Funktionen als Prototyp für orthogonale Codes	11
3.2.2	Leitungs-Kreise in der Digitaltechnik	11

## Abbildungsverzeichnis

1.1	Messung der Übertragungsfunktion eines Systems mit Hilfe eines Oszilloskops	1
1.2	Ein- und Ausgangsspannung des Übertragungssystems	2
2.1	Amplitudengang des ersten Systems	3
2.2	Amplitudengang der Parallelschaltung von n Teilsystemen Die Aussteuerungsanzeige ist für jedes Teisystem angedeutet.	3
2.3	Zeitverläufe an den Ausgängen der Teil-Systeme	3
2.4	Blockschaltbild eines Echtzeit-Analysators	3
2.5	Prinzip des Zungen-Frequenzmessers	4
2.6	Blockschaltbild eines serieller Analyzers mit umgeschalteten Filtern	4
2.7	Blockschaltbild eines seriellen Analyzers mit durchstimmbarem Filter	5
2.8	Blockschaltbild eines Analyzers der in das Basisband heruntermisch	5
2.9	Blockschaltbild eines Analyzers der in eine Zwischenfrequenz-Lage umsetzt	6
2.10	Parallelschaltung von $\infty$ vielen infinitesimal schmalen Teilsystemen	6
2.11	Die theoretisch kürzeste Einschwingzeit eines Tiefpasses	7
3.1	Filterbank zur Definition von Frequenz	8
3.2	Sinus- und Rechteck-Schwingung gleicher Amplitude und gleicher Periodendauer $T$	9
3.3	Beispiele für orthogonale Funktionen	10
3.4	Zur Abhängigkeit der angeregten Filter von deren Eigenschwingung	10
3.5	Walsh-Funktionen wal & sal	11
3.6	Beispiele von Wanderwellen auf Leitungen	12

## Frequenz, Spektrum, Resonanz

Für das physikalische Verständnis der Nachrichtentechnik und auch allgemein der Funktionsweise von Elektronik ist es als Grundlage notwendig, den Zusammenhang zwischen *Zeitfunktionen* und *Spektralfunktionen* von elektrischen oder auch optischen Signalen zu erfassen, und die hierfür existierenden mathematischen Formeln zu beherrschen. Zudem liefert die Theorie wichtige Methoden zur Ermittlung der Übertragungseigenschaften von Systemen. Eine wichtige Anforderung bei der Übertragungstechnik, d.h. bei der Auslegung von Übertragungssystemen, ist der ökonomische Einsatz der „Ressource“ *Frequenz*, weil diese nur in sehr begrenztem Umfang zur Verfügung steht. Für jede einzelne Übertragung wird man deshalb immer bestrebt sein, mit minimalem Aufwand auszukommen, beispielsweise indem die Übertragungssysteme mehrfach ausgenutzt werden. Dabei wird im klassischen Fall an der Übertragungsbandbreite gespart, wobei dadurch die Übertragungsqualität ein bestimmtes Mindestmaß nicht unterschreiten darf. Dies führt sofort auf die Frage, wofür der Begriff Bandbreite steht. Hierfür ist die so genannte Fourier-Analyse geeignet. Die dabei verwendete Definition des Begriffs der Frequenz soll hier veranschaulicht werden.

Eine Analyse und Darstellung von Signalen ist im Frequenzbereich oft wesentlich besser möglich, als im Zeitbereich. Insbesondere erkennt man im Spektrum Zusammenhänge, die man im Zeitbereich nicht sieht. Die **Fourier-Analyse** liefert eine Aussage über die in einem Signal enthaltenen spektralen Komponenten.



J.B.J. Baron de Fourier (21.03.1768 – 16.05.1830), französischer Physiker und Mathematiker entwickelte die analytische Theorie der Ausbreitung und Leitung von Wärme mit Hilfe von Fourier-Reihen und Fourier-Integralen, führte den Begriff der physikalischen Dimension und der Fourier-Analyse ein.

### 1 Physikalische Interpretation der Frequenz und des Spektrums

Von einem System sollen die Übertragungseigenschaften (Frequenzgang) gemessen werden. Dies kann im einfachsten Fall mit Hilfe eines Sinus-Generators und eines Zweikanal-Oszilloskopes erfolgen, Bild 1.1.

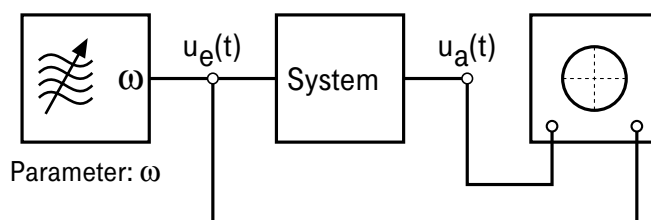


Bild 1.1: Messung der Übertragungsfunktion eines Systems mit Hilfe eines Oszilloskops

Bild 1.2 zeigt die gemessenen Zeitverläufe für die Eingangsspannung  $u_e(t)$  und die Ausgangsspannung  $u_a(t)$ .

Für die Messung hält man (zweckmäßigerweise) die Amplitude  $\hat{U}_e$  der Eingangsspannung  $u_e(t)$  konstant, d.h.  $\hat{U}_e$  ist dann von der eingestellten (Kreis-)Frequenz  $\omega = 2\pi f$  unabhängig.

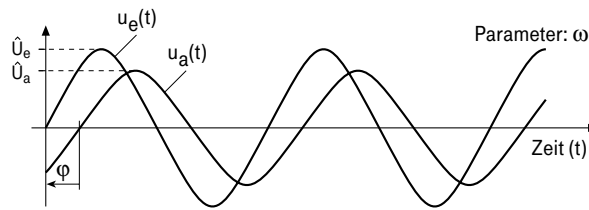


Bild 1.2: Ein- und Ausgangsspannung des Übertragungssystems

Die Frequenz  $\omega$  ist bei dieser Messung ein Parameter, welcher z.B. stufenweise (bei anderen Meßanordnungen auch kontinuierlich: *Wobbelbetrieb*) verändert wird. Die Ergebnisse dieser Messung werden dann in einem Diagramm über der Frequenz  $\omega$  (als Variable) aufgetragen.

Damit ermittelt man die Beziehungen:

$$\frac{\hat{U}_a(\omega)}{\hat{U}_e(\omega)} = |H(\omega)| = A(\omega) \quad \text{Amplitudengang des Systems} \quad (1.1)$$

$$\angle\{\hat{U}_a(\omega), \hat{U}_e(\omega)\} = \varphi(\omega) \quad \text{Phasengang des Systems} \quad (1.2)$$

$A(\omega)$  ist der Amplitudengang und  $\varphi(\omega)$  der Phasengang des Übertragungssystems.

Diese beiden Gleichungen können zur Übertragungsfunktion (Systemfunktion) des Systems zusammengefaßt werden.

$$H(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad \text{Übertragungsfunktion, Systemfunktion} \quad (1.3)$$

### Systemfunktion und Frequenzgang

Der Begriff Frequenzgang wird nur bei (Messung mit) sinusförmiger Eingangsgröße benutzt. Dagegen gilt der Begriff Übertragungsfunktion bei beliebiger Form der Eingangsgröße.

## 2 Frequenzmessung mit dem Spektrum-Analyzer

Die Definition des Begriffs Frequenz geschieht über die Messung des Zeitverlaufes der Ausgangsspannungen. Zur Veranschaulichung werden die Aussteuerungsanzeigen für diese Ausgangsspannungen bei drei verschiedenen Übertragungssystemen im Vergleich betrachtet.

### 2.1 Idealisiertes System mit Grenzfrequenz $\omega_g$

Das erste System habe die Grenzfrequenz  $\omega_g$ . In Bild 2.1 ist sein (idealisiertes) Amplitudengang dargestellt. Betrachtet man die Ausgangsspannung dieses idealisierten Systems auf dem Oszilloskop, sieht man den gesamten *Zeitverlauf* der Ausgangsspannung. Eine an den Ausgang des Systems angeschaltete Aussteuerungsanzeige (z.B. LED-Zeile mit Ansteuerschaltung) zeigt, daß die Ausgangsspannung Frequenzkomponenten im Bereich  $0 \rightarrow \omega_g$  hat.

Man kann zwar den Zeitverlauf der Ausgangsspannung exakt sehen, gewinnt jedoch aufgrund der Aussteuerungsanzeige nur eine Pauschalaussage über den Frequenzverlauf.

### 2.2 System aus parallelgeschalteten Teilsystemen

Im zweiten Schritt wird das Gesamtsystem als Parallelschaltung von  $n$  Teilsystemen dargestellt, siehe hierzu Bild 2.2. Die Aussteuerungsanzeige ist für jedes Teilsystem angedeutet.

Am Ausgang jedes Teilsystems erhält man ein eigenes Oszilloskopbild für den jeweiligen Zeitverlauf, Bild 2.3 [3]. Die (vektorielle) Summation aller dieser Zeitverläufe ergibt den Zeitverlauf der Ausgangsspannung.

Jedem dieser Teilbereiche wird eine Aussteuerungsanzeige zugeordnet. Damit hat man bereits einen Spektrum-Analysator nach dem Parallel-Verfahren (Echtzeit Analysator), wie in Bild 2.4[4] dargestellt.

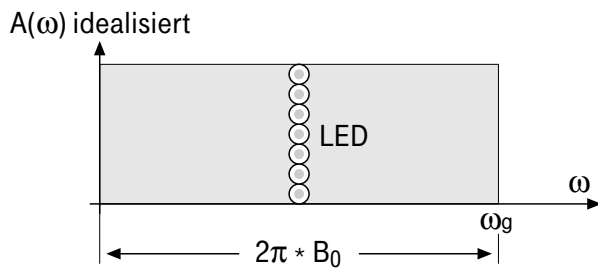


Bild 2.1: Amplitudengang des ersten Systems

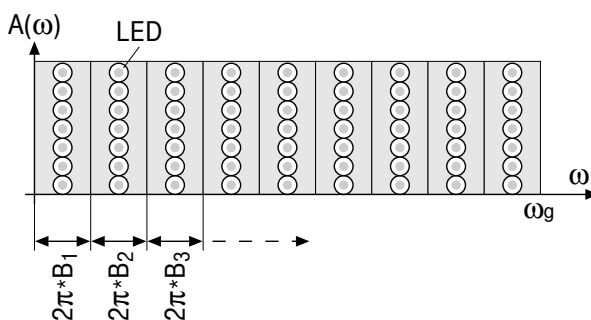


Bild 2.2: Amplitudengang der Parallelschaltung von n Teilsystemen Die Aussteuerungsanzeige ist für jedes Teisystem angedeutet.

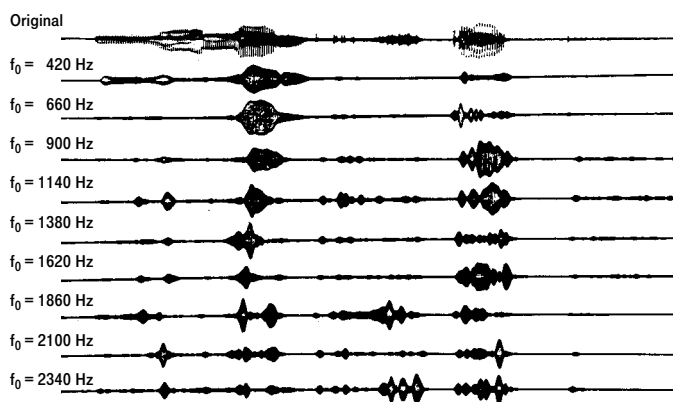


Bild 2.3: Zeitverläufe an den Ausgängen der Teil-Systeme

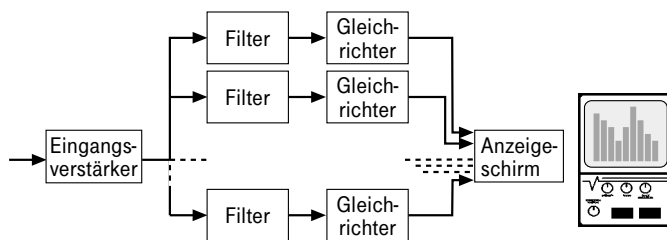


Bild 2.4: Blockschaltbild eines Echtzeit-Analysators

### 2.2.1 Gleiche relative Breite der Filter

Bei Industriegeräten verwendet man keine Filter mit gleicher *absoluter* Bandbreite  $B$ , weil sonst mit steigender Mittenfrequenz der Filter auch deren Güte zunehmen müßte, um gleich steile Filterflanken zu realisieren. Man verwendet statt dessen Filter mit gleicher *relativer* Bandbreite (Bandbreite / Mittenfrequenz), z.B.  $1/3$  Oktave<sup>1</sup>.

### 2.2.2 Zungenfrequenzmesser als Beispiel für einen Echtzeitanalysator

Eine weitere Anwendung eines Echtzeitanalysers ist der Zungenfrequenzmesser zur Kontrolle der Netzfrequenz, Bild 2.5.

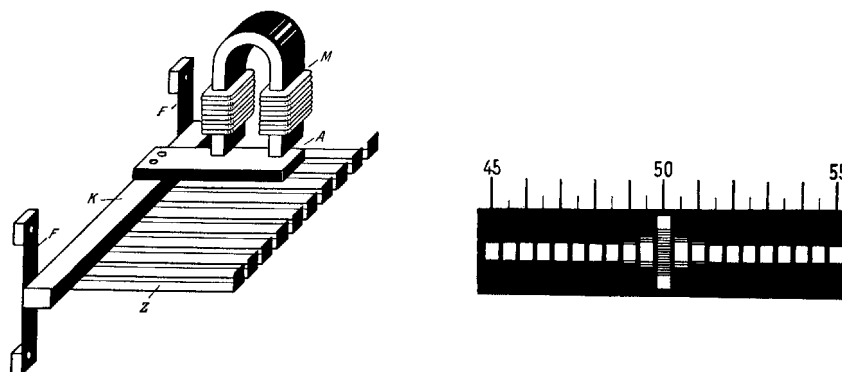


Bild 2.5: Prinzip des Zungen-Frequenzmessers

## 2.3 Vom parallelen zum seriellen Spektrum-Analysator

In diesem Abschnitt wird zum besseren Verständnis eine Überlegung eingefügt, die bei der Behandlung der Fourier-Transformation wieder aufgegriffen und weiter vervollständigt wird.

### 2.3.1 Umgeschaltete Filter

Statt einer parallelen (gleichzeitigen) Auswertung der Teilsysteme (Filter) kann diese auch seriell (nacheinander) vorgenommen werden. Hierbei wird dann so schnell umgeschaltet, daß sich ein stehendes Bild ergibt. Damit kommt man zum Blockschaltbild für einen Analyser<sup>2</sup> gemäß Bild 2.6.

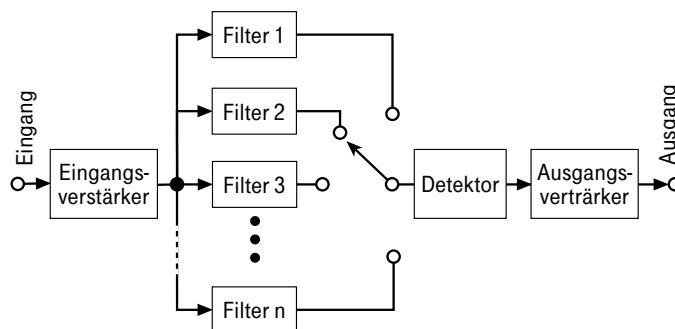


Bild 2.6: Blockschaltbild eines serieller Analyzers mit umgeschalteten Filtern

<sup>1</sup>Eine Oktave bezeichnet das Frequenzverhältnis 1 zu 2.

<sup>2</sup>Das Display ist in diesem und den hier folgenden Bildern nicht gezeichnet.

### 2.3.2 Durchstimmbares Bandpaß-Filter

Anstatt eine Reihe Filter umzuschalten, kann man vorteilhaft ein durchstimmbares Filter<sup>3</sup> einsetzen, Bild 2.7.

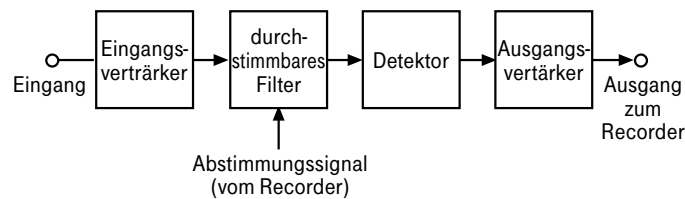


Bild 2.7: Blockschaltbild eines seriellen Analyzers mit durchstimbarem Filter

Das Ziel der Analyse ist es, zu ermitteln, welche Anteile das zu untersuchende Signal bei den jeweiligen Frequenzen hat. Dazu muß man im Prinzip die Durchlaßfrequenz  $\omega$  des abstimmbaren Filters in kleinen Schritten verändern und dabei jeweils das Ausgangssignal ermitteln, das zu der gerade eingestellten Frequenz  $\omega$  gehört<sup>4</sup>.

Dieser Durchstimmvorgang läßt sich auch automatisieren. Dieses „Durchfahren“ der Frequenzen wird technisch mit *Wobbeln* bezeichnet. Die Bedingung für das einwandfreie Arbeiten ist bei dieser Anordnung logischerweise, daß das Filter immer *eingeschwungen* sein muß, weshalb die Abstimm- oder Wobbel-Geschwindigkeit nicht zu hoch gewählt werden darf. Hierüber wird noch weiter unten zu sprechen sein.

### 2.3.3 Frequenzumsetzung in das Basisband

Das abstimmbare Filter läßt sich durch einen Multiplizierer (Mischer, Modulator, Frequenzumsetzer) und einen Oszillator ersetzen. Das Signal wird dadurch in das Basisband (NF-Bereich) heruntergemischt, weshalb jetzt nur noch ein Tiefpaß-Filter (TP) erforderlich ist. Die Frequenz  $\omega$ , bei der analysiert wird, ist hier durch die Frequenz  $\omega_0$  des Umsetzoszillators gegeben, Bild 2.8.

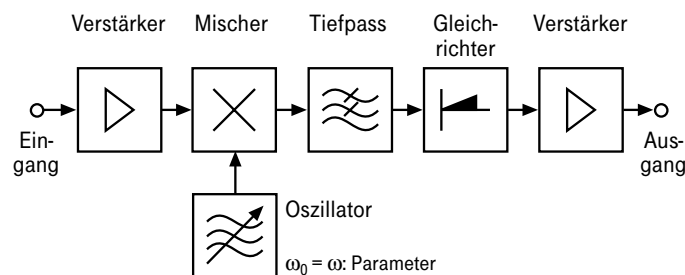


Bild 2.8: Blockschaltbild eines Analyzers der in das Basisband heruntermischt

Die Bedingung für die maximale Abstimmgeschwindigkeit (Wobbel-Geschwindigkeit) ist nun die Einschwingzeit des Tiefpaß-Filters, also die Zeit, die der TP benötigt, um am Ausgang die korrekte Größe der Spannung zur Verfügung zu stellen.

### 2.3.4 Frequenzumsetzung in eine Zwischenfrequenzlage

Eine technisch bessere Lösung ist die Umsetzung in eine Zwischenfrequenzlage<sup>5</sup>  $\omega_z$ . Da die Zwischenfrequenz einen festen Wert hat, können hierfür Filter mit hohen Anforderungen an den Durchlaß- und den Sperr-Bereich realisiert werden.

<sup>3</sup>Diese Struktur entspricht dem in den Anfangsjahren des Rundfunks gebräuchlichen *Geradeaus*-Empfängers. (TRF: tuned radio frequency)

<sup>4</sup>Bei dieser Messung stellt  $\omega$  somit einen Parameter dar.

<sup>5</sup>Dies ist das Prinzip des *Superhet*-Empfängers, das bei Radios, aber auch bei Meßempfängern allgemein angewendet wird.

Die Frequenz des Umsetzozillators  $\omega_o$  kann zu  $\omega_o = \omega_z \pm \omega$  gewählt werden. Man hat also zwei Möglichkeiten. Tatsächlich wählt man  $\omega_o = \omega_z + \omega$ , denn hier wird das Variationsverhältnis für die Frequenz  $\omega_o$  des Umsetzozillators geringer, Bild 2.9. Für das Display wird jedoch  $\omega$  und nicht  $\omega_o$  als X-Achse gewählt, denn es ist ja die Analyse des Eingangssignals durchzuführen. Die Wahl der Frequenz  $\omega_z$  ist in weitem Rahmen willkürlich und erfolgt nach technischen Gesichtspunkten.

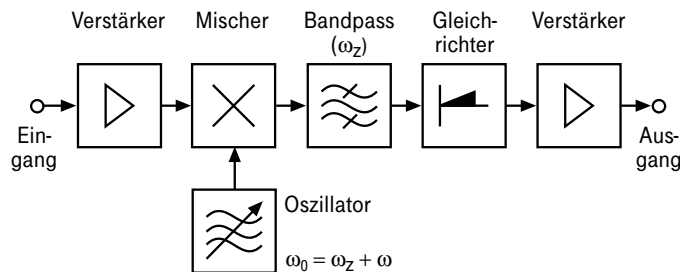


Bild 2.9: Blockschaltbild eines Analyzers der in eine Zwischenfrequenz-Lage umsetzt

Bei Spektrumanalysatoren wird  $\omega_z$  stets größer gewählt als die höchste zu analysierende Frequenz. Eine solche Lösung (allerdings dann mit mehrfacher Umsetzung in immer niedrigere ZF-Lagen) wird praktisch beim Meßgerät „Spektrumanalyzer“ angewendet<sup>6</sup>.

### 2.4 System mit $\infty$ vielen und infinitesimal schmalen parallelschalteten Teilsystemen

Wir kommen hier zu einem Grenzwert für ein System, das sich technisch nicht mehr realisieren läßt, Bild 2.10. Jedoch liefert eine spektrale Zerlegung einer Zeitfunktion mit Hilfe von Fourier (Fourier-Reihe bzw. Fourier-Transformation) ein Ergebnis, das genau dem entsprechen würde, wenn jedem der  $\infty$  vielen  $\infty$  schmalen Teilsysteme eine Aussteuerungsanzeige zugeordnet wäre. Insofern ist also dieses hypothetische System nützlich, weil es den Zusammenhang zwischen den durch die Fourier-Analyse erzielten Formeln und den meßtechnischen Ergebnissen zeigt.

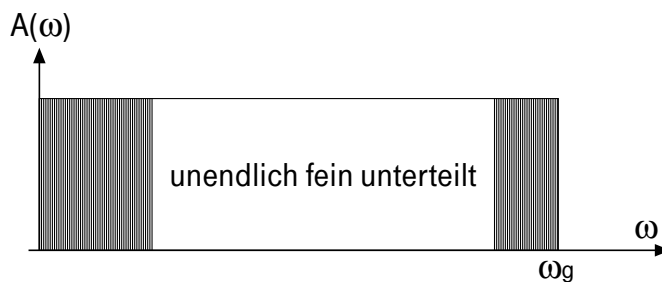


Bild 2.10: Parallelschaltung von  $\infty$  vielen infinitesimal schmalen Teilsystemen

### 2.5 Das Zeit-Bandbreiten-Gesetz

Die Einschwingzeit  $t_e$  eines Systems ist umgekehrt (reziprok) proportional zu seiner Bandbreite  $B$  bzw.  $B_\omega = 2\pi B$ ,

$$t_e \sim \frac{1}{B} \quad \text{Einschwingzeit des Gesamtsystems} \tag{2.1}$$

<sup>6</sup>Bei der Fourier-Transformation wird sich zeigen, daß die Strukturen der Bilder 2.7 und 2.8 genau durch die mathematischen Formeln (für die F-Transformation) beschrieben werden.

Dies gilt ähnlich auch für die Teilsysteme der Bilder 2.2 und 2.4. Diese Systeme sind Bandpässe.  $B_n$  ist deren Bandbreite. Verglichen mit TP-Systemen ist für die Einschwingzeit  $B_n/2$  anzusetzen.

$$t_{e_n} \sim \frac{2}{B_n} \quad \text{Einschwingzeit von Teilsystem n} \quad (2.2)$$

### 2.5.1 Untere Grenze für die Einschwingzeit

Für Tiefpaß-Systeme ist diese Aussage leicht einsichtig. Statt der Bandbreite  $B$  wird hier die Grenzfrequenz  $f_g$  bzw.  $\omega_g = 2\pi f_g$  betrachtet. Ein solches System kann  $\cos(\omega_g t)$  als Schwingung mit der höchsten Frequenz übertragen, d.h. aber, beim Anlegen eines Sprunges  $\sigma(t)$  kann die Sprungantwort  $a(t)$  bestenfalls gemäß  $\cos(\omega_g t)$  ansteigen, wodurch die theoretisch kürzeste Einschwingzeit  $t_{e_{min}}$  festgelegt ist, Bild 2.11.

$$t_{e_{min}} = \frac{1}{2f_g} = \frac{\pi}{\omega_g} \quad \text{Theoretisch kürzeste Einschwingzeit eines TP-Systems} \quad (2.3)$$

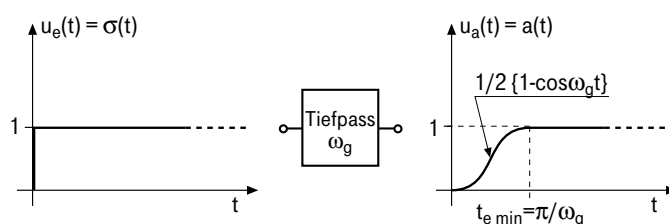


Bild 2.11: Die theoretisch kürzeste Einschwingzeit eines Tiefpasses

Die Gleichung (2.3) wird **in der Praxis zur Abschätzung der Einschwingzeit**  $t_e$  realer Systeme stets benutzt. Als Grenzfrequenz wird dabei z.B. die 3 dB Grenzfrequenz  $f_{3dB}$  eingesetzt.

Die Anwendung auf die betrachteten Übertragungssysteme ergibt, daß das  $\infty$  fein unterteilte System eine  $\infty$  lange Einschwingzeit (und Ausschwingzeit) hat. Für diesen Fall gilt also:

$$t_e \sim 1/0 \rightarrow \infty \quad \text{Einschwingzeit eines Tiefpasses mit Grenzfrequenz} \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

### 2.5.2 Spektrum und Spektraldichte

Wegen  $t_e \rightarrow \infty$  kann daher nur eine *periodische Zeitfunktion* (d.h. von  $t = -\infty$  bis  $t = +\infty$  andauernd) ein vollständiges Einschwingen der Teilsysteme (Filter) bewirken.

Hingegen wird eine Anregung mit einem nur endliche Zeit andauernden (nicht periodischen, einmaligen) Signal keine merkbare Aufschaukelung bewirken.

Bei der Berechnung der Spektralverteilung nach Fourier muß in einem solchen Fall eine **Umnormierung** vorgenommen werden:  $\text{Spektrum} \Rightarrow \text{Spektraldichte}$ , wie sich bei der **Fourier-Transformation** zeigen wird.

### 2.5.3 Zeit und Frequenz sind reziprok zueinander.

Der (reziproke) Zusammenhang zwischen Einschwingzeit und Bandbreite, Gleichung (2.4), welcher Zeit-Bandbreiten-Gesetz genannt wird, kann an einem weiteren *Beispiel* veranschaulicht werden:

Ein Musik-Instrument soll mit einer Stimmgabel gestimmt werden. Man vergleicht hierzu die beiden Schwingungsfrequenzen mit Hilfe der sich ergebenden Schwebungen. Je genauer die Frequenzen übereinstimmen, umso größer wird die Periodendauer der Schwebung, umso länger muß die Meßzeit werden. (Meßzeit ist hier der Einschwingzeit für eine Periodendauer der Schwebung gleichgesetzt.)

Sollen beide Frequenzen exakt gleich werden, so muß man damit  $\infty$  lang auf ein Schwebungsminimum warten.



### 2.5.4 Das Zeit-Bandbreiten-Gesetz der Nachrichtentechnik

Man erkennt hier eine Art von *Unschärfe-Relation*, die als Zeit-Bandbreiten-Gesetz der Nachrichtentechnik bezeichnet wird:

$$\Delta t \sim 1/\Delta\omega \quad \text{d. h.} \quad \Delta t \cdot \Delta\omega = \text{Konstante} \quad \text{Zeit-Bandbreiten-Gesetz} \quad (2.5)$$

Für  $\Delta\omega \rightarrow 0$  hat man eine exakte Aussage über den Frequenzbereich, jedoch keine Aussage mehr über den Zeitbereich. Hier gibt es jetzt nur noch cos-förmige Dauerschwingungen pro  $\infty$  schmalem Filter, denn wenn sowohl die Einschwingzeit als auch die Ausschwingzeit gegen  $\infty$  geht, kann nur noch eine Dauerschwingung existieren.

## 3 Definition des Begriffs Frequenz

Bezeichnet man die Parallelschaltung der Teilsysteme Bilder 2.2 und 2.4 als Filterbänke, läßt sich die spektrale Zerlegung einer Zeitfunktion in Übereinstimmung mit der Fourier-Zerlegung leicht anschaulich interpretieren, Bild 3.1.

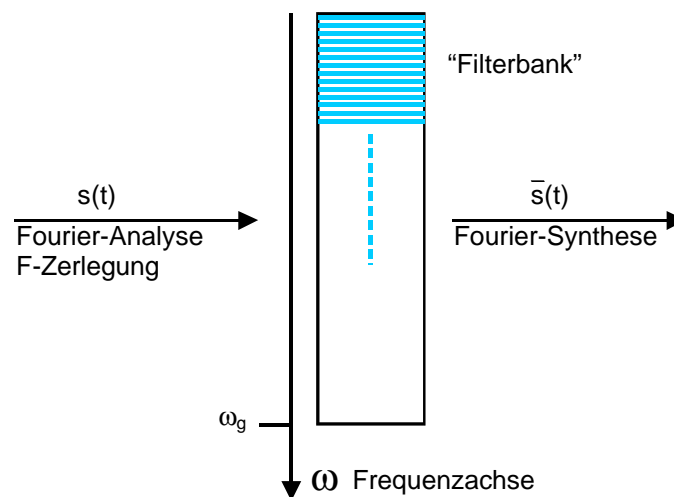


Bild 3.1: Filterbank zur Definition von Frequenz

Zeichnet man entlang der Filterbank eine Frequenzachse, so erhält man eine spektrale Zerlegung in Frequenzkomponenten.

**Analyse:** Welches Filter wird durch die Zeitfunktion  $s(t)$  wie stark angeregt? Bestimmt wird Amplitude und Phase der Schwingung des Filters.

**Synthese:** Wie setzt sich eine Zeitfunktion  $s(t)$  aus Dauerschwingungen zusammen?

Frequenz wird damit im Zusammenhang mit dem hierfür verwendeten Meßgerät definiert. Dies ist sofort verständlich, wenn man überlegt, daß die Definition der Frequenz über die Fourier-Zerlegung im Prinzip auf das gleiche Ergebnis führt, da wie oben ausgeführt, das Meßverfahren (im dargestellten Grenzfall) genau durch die Fourier-Analyse beschreibbar ist.

### 3.0.5 Widersprüche bei anderen Definitionen von Frequenz

Bei den sonst üblichen Definitionen der Frequenz

$$\omega = 2 \cdot \pi / T \quad T: \text{Periodendauer} \quad (3.1)$$

$$\omega = d\varphi/dt \quad \varphi: \text{Phasenwinkel} \quad (3.2)$$

stößt man auf *Widersprüche*. Die Definition nach Gleichung (3.1) liefert tatsächlich nur „Abtastwerte“, wie aus den folgenden Abschnitten deutlich wird. Die Definition nach Gleichung (3.2) ergibt eine zeitabhängige Frequenz  $\omega = \omega(t)$ , wenn der Phasenwinkel  $\varphi(t)$  nicht linear ansteigt. Die Definition mit der Filterbank zeigt aber gerade, daß die Frequenz, wie sie bei der Fourier-Analyse verwendet wird, keine Zeitabhängigkeit aufweist.<sup>1</sup>

### 3.1 Zusammenhang mit der Eigenschwingung des Meßgerätes

Würde man die Frequenz nur mit Hilfe der *Periodendauer*  $T$  definieren, Gl. (3.1), so hätten offensichtlich eine sinusförmige und eine rechteckförmige Schwingung die gleiche „Frequenz“, Bild 3.2.

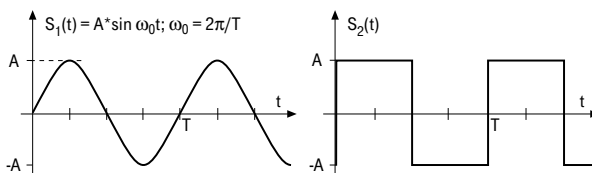


Bild 3.2: Sinus- und Rechteck-Schwingung gleicher Amplitude und gleicher Periodendauer  $T$

Physikalisch interpretiert ist aber:

**Sinus:** Eigenschwingung eines ungedämpften LC-Kreises<sup>2</sup>

**Rechteck:** Eigenschwingung eines ungedämpften Leitungskreises<sup>3</sup>

Bei der Messung mit der Filter-Bank kommen die betreffenden Filter offensichtlich in Resonanz und werden aufgeschaukelt (schwingen ein).

### 3.2 Resonanz als dominierendes Prinzip in der Übertragungstechnik

Resonanz bedeutet, daß die anregende Zeitfunktion und die Eigenschwingung in allen ihren *Parameterwerten* übereinstimmen müssen (Periodendauer  $T$ , Kurven-Form), wobei die Übereinstimmung mit der Kurvenform hier offensichtlich besonders wichtig ist.

Die *Resonanz* in allen ihren Verallgemeinerungen und Erscheinungsformen zeigt sich somit als technisch elementares Prinzip. In der Funktechnik wird die empfangsseitige Trennung vieler sich überlagernder Signale genau hierdurch bewirkt. Insofern kann die „Filterbank“ als Prototyp eines Empfängers betrachtet werden.

Am Beispiel eines Schwingkreises (mit Dämpfung  $d = 0$ , d.h. Bandbreite  $B \rightarrow 0$ , Güte  $Q \rightarrow \infty$ , Einschwingzeit  $t_e \rightarrow \infty$ ) läßt sich das Resonanzprinzip wie folgt formulieren :

- Eine anregende Funktion  $f_n(t)$  kann den Schwingkreis dann und nur dann aufschaukeln, wenn  $f_n(t)$  mit der Eigenschwingung  $f_m(t)$  des Schwingkreises in allen Parameterwerten übereinstimmt.

$f_n(t)$  und  $f_m(t)$  sind in diesem Falle cos-förmig.

Das Resonanzphänomen beschränkt sich nicht auf cos-förmige Zeitfunktionen, sondern kann auch für andere Formen angewendet werden, wie z.B. rechteckförmige Zeitfunktionen.

Mathematisch ist diese **Resonanz** mit Hilfe einer **Orthogonalitätsbedingung** ausdrückbar:

<sup>1</sup>Die Definition nach Gleichung (3.2) wird bei der „Frequenz-Modulation“ angewendet und ergibt dann die sogenannte „Momentanfrequenz“.

<sup>2</sup>Ein LC-Kreis ist der übliche Schwingkreis aus einer Spule (L) und einem Kondensator (C). Idealisiert werden die Verluste im Kreis zu Null angenommen, wodurch dieser nach einer Anregung eine sinusförmige Dauerschwingung ausführen würde.

<sup>3</sup>Leitungen werden in der Höchsthochfrequenztechnik als verlustarme Schwingkreise verwendet. Die technisch größere Bedeutung haben heutzutage jedoch digitale Anwendungen, bei denen entsprechende „Rechteckschwingungen“ als Eigenschwingungen oder verallgemeinerte „Resonanz“ (in Form von Codes) auftreten. Eine typische Anwendung hierzu ist die CDMA (Code Division Multiplex Access), eine Technik, die z.B. bei der 3. Generation des Mobilfunks (UMTS, Universal Mobile Telecommunications System) zum Einsatz kommt.

$$\int_0^T f_n(t) \cdot f_m(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Orthogonalitäts-Relation} \quad (3.3)$$

Beispiele für orthogonale Sin-Cos-Funktionen bzw. Rechteck-Funktionen (z.B. Walsh-Funktionen) zeigt Bild 3.3[5].

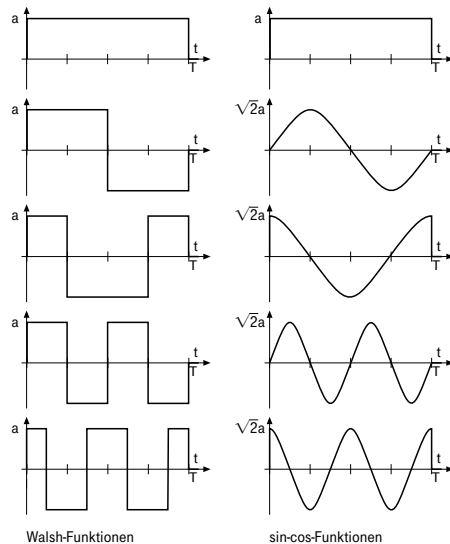


Bild 3.3: Beispiele für orthogonale Funktionen

Es soll nun unterstellt werden, daß „Meßgeräte“ (allgemeiner: Empfänger) mit zweierlei Typen von Filterbänken verfügbar seien, nämlich LC-Kreise einerseits und Leitungs-Kreise andererseits. Beide werden mit jeweils einer Sin-Schwingung bzw. einer Rechteck-Schwingung gemäß Bild 3.2 angeregt. Welche Filter dadurch jeweils aufgeschaukelt werden, veranschaulicht Bild 3.4.

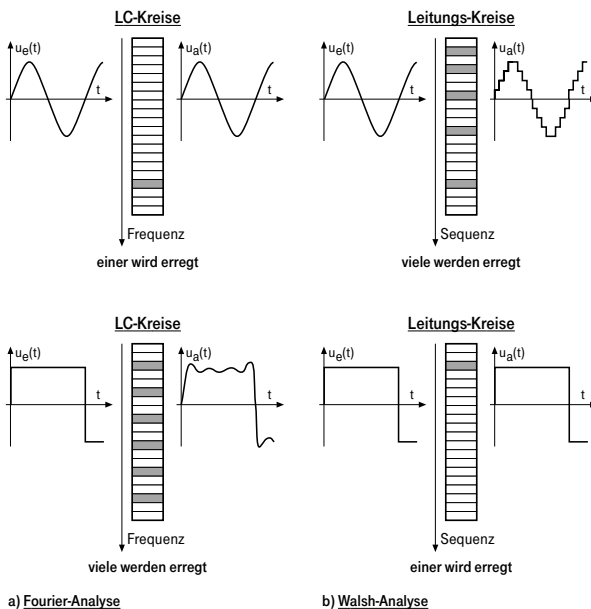


Bild 3.4: Zur Abhängigkeit der angeregten Filter von deren Eigenschwingung

- Sind die Eigenschwingungen sin- oder cos-förmig, wird die zugehörige Achse mit „Frequenz“ bezeichnet. Die entsprechende Analyse wird mit „Fourier“ bezeichnet.
- Sind die Eigenschwingungen jedoch rechteckförmig, wird zur Unterscheidung und Verdeutlichung von „Sequenz“ gesprochen. Die zugehörige Analyse wird mit „Walsh“ bezeichnet.

Nur in dem Fall, wo die Eigenschwingung der Filter auch mit der *Form* der anregenden Funktion übereinstimmt, wird jeweils nur ein einziges Filter angeregt. Andernfalls kommen gar keine oder aber mehrere Filter in Resonanz.

- Die Fourier-Zerlegung ist eine Zerlegung in sinus- bzw. cosinus-förmige Dauerschwingungen, weshalb ihr physikalisch die Filterbank mit den LC-Kreisen entspricht.
- Die Walsh-Zerlegung ist eine Zerlegung in rechteckförmige Dauerschwingungen, weshalb ihr die Filterbank mit den Leitungskreisen entspricht.

Offensichtlich entspricht die **Fourier-Zerlegung** eher den Problemstellungen der **analogen Systeme** und die **Walsh-Zerlegung** denen der **digitalen Systeme**. Hieraus jedoch den Schluß zu ziehen, daß die Fourieranalyse heutzutage unwichtig geworden wäre, greift zu kurz: gerade bei der Digitalübertragung hat man stets nur **bandbegrenzte Systeme** zur Verfügung und die **Grenzfrequenz** ist eine Eigenschaft **analoger** Systeme, so daß die Digitalsignale nicht mehr rechteckförmig sondern verrundet sind, d.h., man hat in der Tat analoge Signale mit einigen digital interpretierbaren Eigenschaften. Aus diesem Grunde behält die Fourier-Analyse ihre Wichtigkeit.

### 3.2.1 Walsh-Funktionen als Prototyp für orthogonale Codes

Bei Code Division Multiplex Access (CDMA) Funksystemen werden zur Unterscheidung der Übertragungskanäle orthogonale Codes verwendet, die als Zeitverlauf Ähnlichkeiten mit Walsh-Funktionen haben, Bild 3.5[6].

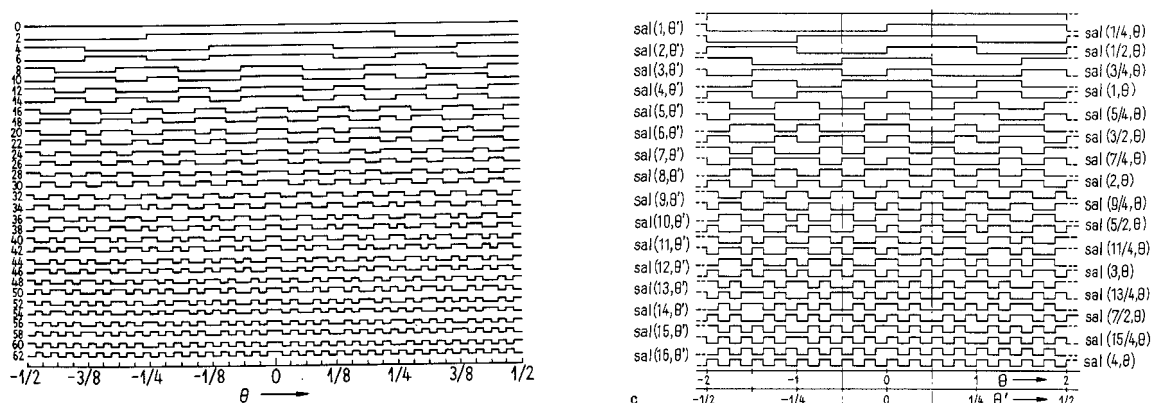


Bild 3.5: Walsh-Funktionen wal & sal

Frequenzmäßig belegt also jeder CDMA Kanal die *gesamte* zur Verfügung stehende *Bandbreite*. Die empfangsseitige Trennung der Kanäle erfolgt somit nicht frequenzmäßig, sondern mittels der „verallgemeinerten Resonanzen“, die sich durch orthogonale Codes erzeugen lassen, die hier auch „Spreiz-Codes“ genannt werden. Technisch ist dies in diesem Falle ganz einfach, weil eine durch einen Speiz-Code erzeugte Verwürfelung durch die modulo 2 Addition (EXOR) des gleichen Codes auf der Empfangsseite wieder rückgängig gemacht werden kann. Kanäle, die mit anderen Codes verwürfelt sind, werden durch diese EXOR Operation im Empfänger nur zusätzlich verwürfelt und bilden ein Störsignal.

### 3.2.2 Leitungs-Kreise in der Digitaltechnik

Die rechteckförmigen Eigenschwingungen von Leitungen sind schon lange z.B. aus der Starkstromtechnik bekannt. Man spricht dort von Wanderwellen, die bei Kurzschlüssen oder Blitzeinschlägen entstehen, Bild 3.6[7].

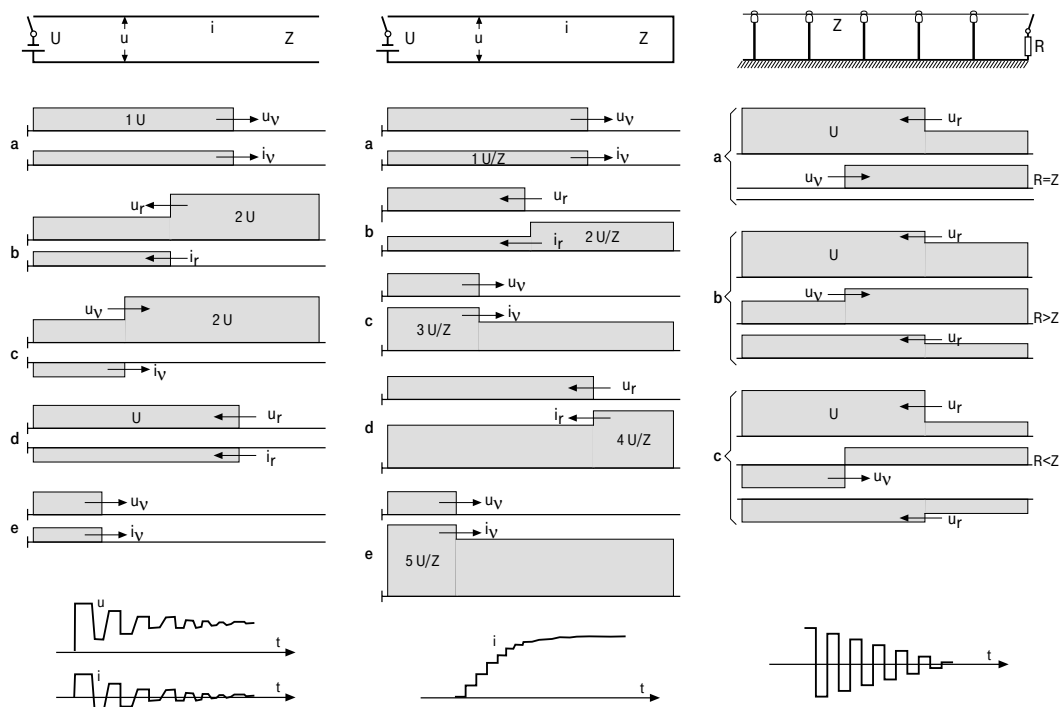


Bild 3.6: Beispiele von Wanderwellen auf Leitungen

Ein gleichartiges Problem hat man bei der Übertragung von rechteckförmigen Datensignalen über Leitungen (Bus, IEC-Bus, V24 etc.). Da i.a. die Leitungen an den Enden nicht angepaßt sind, ergeben sich durch Reflexionen hin und her laufende Impulse, die sich den Daten überlagern.

Ist die Leitung so lang, daß diese Echos zu Löschungen bzw. zu Geister-Impulsen führen, kann eine fehlerfreie Datenübertragung nicht mehr stattfinden.

Zur Abhilfe kann man die Datenrate klein machen und/oder die Leitung gemäß ihrem Wellenwiderstand anpassen.

Bei den heute üblichen sehr schnellen digitalen Schaltungen und PCs muß sogar schon auf der Platine für Anpassung<sup>4</sup> gesorgt werden. Damit treffen sich die Hochfrequenztechnik und die Digitaltechnik wieder: **Schnelle Digitaltechnik ist Hochfrequenztechnik!**

## Literatur

- [1] Telekom Unterrichtsblätter 2001 S. 522 – 529
- [2] Bergmann: *Lehrbuch der Fernmeldetechnik*, Fachverlag Schiele & Schoen, 5. Auflage, 1986
- [3] Küpfmüller, K.: *Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung*, S. Hirzel Verlag, 3. Auflage, 1968
- [4] Randall, R.B.: *Frequency Analysis*, Brüel & Kjaer, 1977
- [5] Lüke, H.D.: *Signalübertragung*, Springer, 5. Auflage, 1990
- [6] Harmuth, H.F.: *Transformation of Information by Orthogonal Functions*, Springer, 2. Auflage, 1970
- [7] Rüdberg, R.: *Elektrische Schaltvorgänge*, Springer, 3. Auflage, 1932

<sup>4</sup>z.B. mit Streifenleiter-Technik