1 Zeigerdarstellung harmonischer Signale und negative Frequenz

Die harmonischen Schwingungen $\cos(\omega_0 t)$ und $\sin(\omega_0 t)$ werden gerne mit Hilfe von Zeigern dargestellt, weil dies auf eine bequeme Berechnungsmöglichkeit mittels der komplexen Rechnung führt.

Dieser Zusammenhang läßt sich veranschaulichen [1], indem eine *rotierende Scheibe* betrachtet wird, auf der ein Pfeil $\uparrow$ oder *Zeiger* markiert ist. Wird dieser (rotierende) Pfeil sowohl in Richtung der reellen als auch der imaginären Achse projiziert, so beschreiben die zeitlichen Änderungen der Länge der Projektion eine Cos– bzw. eine Sin–Schwingung. Dies ist der Zusammenhang zwischen der Kreisbewegung bzw. der *komplexen Rechnung* und den Sin– bzw. Cos–Schwingungen bzw. der reellen Rechnung, Bild 1.1. Die Projektion in Richtung der imaginären Achse, d.h. auf die reelle Achse, ergibt dabei die Cos–förmige Schwingung.

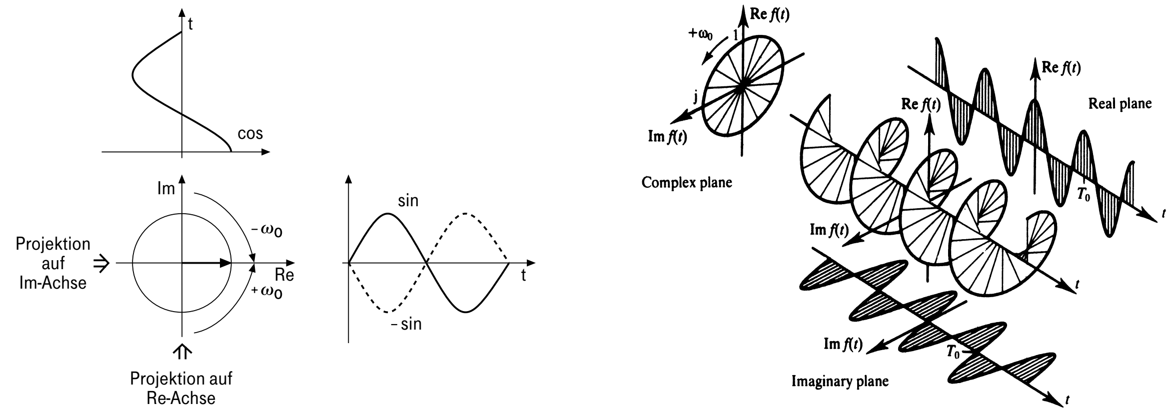

Abbildung 1.1: Projektion der Kreisbewegung

Der Winkel zwischen den beiden Projektionen ist 90^0 . Dies entspricht dem Übergang von $\Re$ (reell) nach $\Im$ (imaginär) in der komplexen Ebene, d.h. **„j" bedeutet** 90^0 **Phasendrehung**, wie man auch vom Übergang von der Cos–Schwingung zur Sin–Schwingung erkennt.

Es gibt folgenden Zusammenhang zwischen den Symmetrien im Zeitbereich und den Eigenschaften in der komplexen Ebene:

$$\boxed{\begin{array}{llll} \cos: & \text{gerade} & \Longrightarrow \quad 0^0 & : \text{reell} \\ \sin: & \text{ungerade} & \Longrightarrow \quad 90^0 & : \text{imaginär} \end{array}}$$

Wird die Drehrichtung umgekehrt, ändert sich nichts bei der geraden Funktion, wohingegen die ungerade Funktion ihr Vorzeichen wechselt, siehe auch Bild 1.1.

Mathematisch wird der Zusammenhang mit der Zeigerdarstellung durch die **Euler'schen Formeln** ausgedrückt (**Euler I**).

$$\boxed{\begin{array}{lllllll} e^{jx} & = & \cos x + j\sin x; & x & = & \omega_0 t & \\ e^{-jx} & = & \cos x - j\sin x; & -x & = & (-\omega_0)t & \end{array} \quad \textbf{Euler I}} \tag{1.1}$$

Umgeformt ergeben sich die bekannten und oft benötigten Beziehungen (**Euler II**):

$$\boxed{\begin{array}{lllllll} \cos x & = & \dfrac{1}{2}\left\{e^{jx} + e^{-jx}\right\}; & x & = & \omega_0 t \\ \sin x & = & \dfrac{1}{2j}\left\{e^{jx} - e^{-jx}\right\}; & -x & = & (-\omega_0)t \end{array} \quad \textbf{Euler II}} \tag{1.2}$$

Die Gleichungen (1.2) lassen sich nun wieder graphisch durch **zwei gegenläufige Zeiger** veranschaulichen, Bild 1.2.

Aus Bild 1.2 sieht man z.B., daß sich eine relle Größe aus einer komplexen und einer konjugiert komplexen Größe zusammensetzen läßt, entsprechend zu:

$$x = \frac{1}{2}\{\underbrace{(x+jy)}_{\text{komplex}} + \underbrace{(x-jy)}_{\text{konjugiert komplex}}\} \tag{1.3}$$

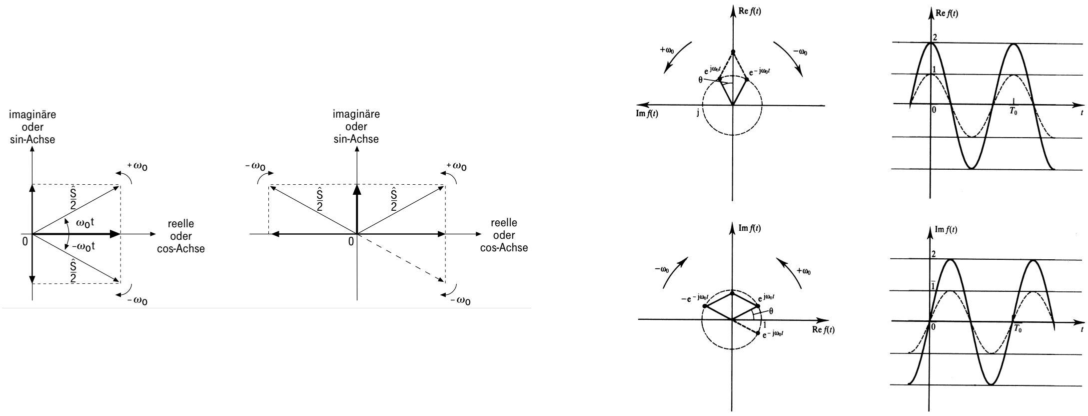

Abbildung 1.2: Darstellung der Cos– bzw. Sin–Schwingung durch rotierende Zeiger

1.0.1 Die Negative Frequenz

Mit Hilfe der Euler-Beziehungen kann man **formal** eine **negative Frequenz** definieren, wie z.B. aus der Darstellung für $\cos(\omega t)$ hervorgeht. Das Minuszeichen aus der Darstellung nach Euler wird dabei der Frequenz ω zugeordnet.

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left\{e^{j\omega t} + e^{j(-\omega)t}\right\} \tag{1.4}$$

Formel	: $e^{j\omega t}$	$e^{j(-\omega)t}$	
Zeiger	: links	rechts	herum drehend
mathematisch	: positiver	negativer	Umlaufsinn
formal	: positive	negative	Frequenz

- **Physikalisch** gibt es **keine negativen Frequenzen**, aber zur *bequemeren Darstellung* mit komplexer Rechnung führt man *formal* eine negative Frequenz ein.

Graphisch läßt sich eine negative Frequenz darstellen, indem die Frequenzachse zu negativen Werten verlängert wird. Dies führt dann auf eine zweiseitige — und damit *symmetrische* — Darstellung im Frequenzbereich, Bild 1.3.

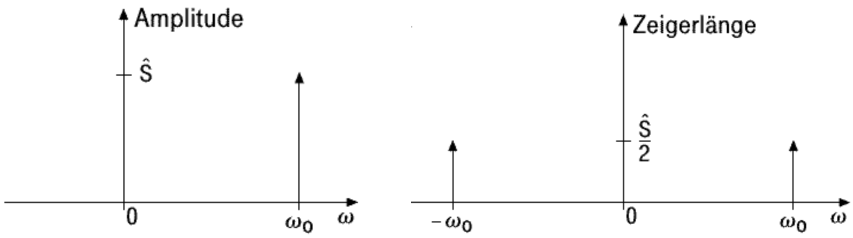

Abbildung 1.3: Spektrum einer harmonischen Schwingung in ein- und zweiseitiger Darstellung

Bei der einseitigen Darstellung wird im Spektrum die Amplitude der Schwingung aufgetragen, während bei der zweiseitigen Darstellung die Zeigerlängen (= Amplitude/2) aufgetragen werden. Der Vorteil der zweiseitigen Darstellung wird sich z.B. bei der Behandlung der Fourier–Zerlegung oder der Modulation erweisen.

Literatur

[1] Kraniauskas, P.: Transforms in Signals and Systems, Addison–Wesley, 1992