

Die Bestimmung einfacher Antennendiagramme (II)

At 12

3 Blätter

Teil II: Dipol vor einer leitenden Wand und Flächenstrahler

1 Der Einfluß einer leitenden Wand auf das Feld eines Einzeldipols

Eine ideale einseitige Richtwirkung für einen Einzeldipol oder eine Dipolgruppe kann erreicht werden, wenn man die Antenne vor einer elektrisch leitenden Wand aufstellt. Vielfach wird auch der Einfluß der Erdoberfläche auf das Antennenfeld dadurch berücksichtigt, daß man die Erdoberfläche als vollkommen leitend annimmt, so daß hier die gleichen Überlegungen gelten, wie bei einer leitenden Wand.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie der Einfluß einer leitenden Fläche erfaßt werden kann. Es sind hierbei zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich Dipolachse und Wand sind parallel zueinander, oder sie stehen senkrecht aufeinander.

1.1 Dipolachse verläuft parallel zur leitenden Fläche

Die Anordnung, die wir betrachten wollen, zeigt Bild 1. Die leitende Wand liege in der y - z -Ebene; der Einzeldipol befinde sich im Abstand d von der Wand auf der x -Achse. Wir müssen nun – um die folgenden Überlegungen durchzuführen – auf einige Grundlagen zurückgreifen. Bekanntlich kann

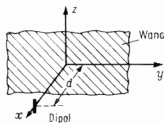


Bild 1. Dipolachse parallel zu einer leitenden Fläche

ein Dipol als Schwingkreis aufgefaßt werden, bei dem sich die Energie einmal im Magnetfeld und einmal im elektrischen Feld befindet. Wir betrachten nun den Augenblick, in dem sich die gesamte Energie im elektrischen Feld befindet. Zu dieser Zeit ist der Strom im Dipol und damit auch das Magnetfeld um den Dipol herum gleich Null. Es besteht lediglich ein elektrisches Feld, wie es Bild 2a zeigt. Wir setzen hierbei willkürlich voraus, daß im betrachteten Augenblick das obere Ende des Dipols positiv und das untere negativ geladen sei, so daß das elektrische Feld wie eingezeichnet verläuft. Errichtet man innerhalb dieses elektrischen Feldes eine leitende Wand, wie Bild 2b zeigt, so sieht man, daß die elektrischen Feldlinien unter verschiedenen Winkeln auf die Wand auftreffen.

In einem beliebigen Punkt A der Wand zerlegen wir nun den Vektor der elektrischen Feldstärke E in seine Komponenten E_z und E_x (Bild 3). Die leitende Wand bewirkt, da sie

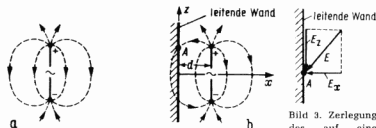


Bild 2. Feldverteilung um einen Dipol zu einem Zeitpunkt, in dem $i = 0$. Magnetfeld = 0 ist: a) im freien Raum; b) eine Wand verhindert die ungestörte Ausbreitung des elektrischen Feldes

Bild 3. Zerlegung des auf eine Wand auftreffenden Vektors E in seine Komponenten E_x und E_z

ja eine Äquipotentialfläche ist, daß die Komponente E_z verschwindet, denn in einer ideal leitenden Fläche können keine Potentialunterschiede und somit auch keine elektrischen Feldstärken auftreten. Das bedeutet, daß elektrische Feldlinien nur unter einem rechten Winkel auf einen Leiter auftreffen können (Komponente E_x). Diese Randbedingung wird erfüllt, wenn man sich spiegelbildlich zum vorgegebenen Dipol einen zweiten Dipol denkt, dessen Ladungszustand gerade umgekehrt ist (Bild 4a). Dieser gespiegelte Dipol erzeugt ein spiegelbildliches elektrisches Feld, dessen Komponenten E_x und E_z mit den Komponenten E_x und E_z betragsmäßig übereinstimmen, wobei jedoch E_z entgegengesetzt zu E_z gerichtet ist, so daß sich beide Komponenten in der leitenden Fläche gerade kompensieren (Bedingung).

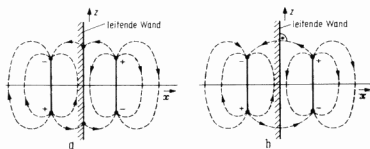


Bild 4. Feldverteilung bei Einfügen eines gespiegelten und gegenphasig erregten Dipols: a) die Felder der beiden einzelnen Dipole; b) ihr resultierendes Feld

Als resultierendes Feld ergibt sich das Feld in Bild 4b.

Wir wollen nun noch prüfen, ob die Einführung des gespiegelten Dipols auch die Randbedingungen für das magnetische Feld erfüllt.

Das elektrische Feld, von dem wir ausgegangen waren, bricht zusammen und erzeugt im Dipol einen Strom, der von Plus nach Minus fließt. Dieser Strom umgibt sich mit einem magnetischen Feld, dessen Richtung nach der rechten Handregel bestimmt wird. Es ist in Bild 5a gezeigt (Blickrichtung = $-z$ -Richtung). Ähnlich wie für das elektrische Feld gilt, daß keine Feldstärkekomponenten tangential zum Leiter auftreten.

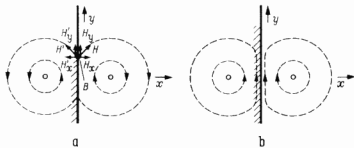


Bild 5. Das Magnetfeld eines solchen Dipolpaares: a) die Zerlegung der beiden Einzelfelder im Punkt B in ihre Komponenten H_x und H_y ; b) das resultierende Magnetfeld. (Die Feldlinien von Bild 5 stehen senkrecht auf denen von Bild 4, orthogonale Anordnung)

treten können, gilt für das magnetische Feld, daß keine Komponenten senkrecht zum Leiter auftreten, da diese Wirbelströme erzeugen und sich selbst vernichten. Das bedeutet in unserem Beispiel, daß sich die Komponenten in x -Richtung aufheben müssen. Wie Bild 5b zeigt, ist dies tatsächlich der Fall.

Die Einführung eines gespiegelten Dipols ist also zulässig und erlaubt den Einfluß einer leitenden Wand zu berechnen. Das resultierende Magnetfeld ist in Bild 5b dargestellt.

1.2 Dipolachse steht senkrecht zur leitenden Fläche

Die Anordnung ist in *Bild 6* dargestellt. Die leitende Fläche liegt jetzt in der x - y -Ebene. Der Dipol liegt im Abstand d von der x - y -Ebene auf der z -Achse.

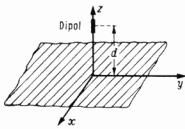


Bild 6. Dipolachse senkrecht zu einer leitenden Fläche

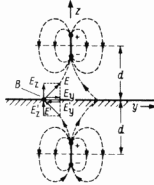


Bild 7. ►

Konstruktion des resultierenden elektrischen Feldes aus den beiden Einzelfeldern des Dipolpaares. Die leitende Fläche wirkt so, als ob ein zweiter Dipol mit passender Erregung vorhanden wäre

Wir gehen wieder vom elektrischen Feld aus, wie es *Bild 7* zeigt, und wir sehen, daß in einem beliebigen Punkt B zunächst wieder eine (verbotene) tangentielle Komponente E_y und eine normale Komponente E_x auftritt. Führen wir wieder einen gespiegelten Dipol ein, so muß dieser den eingezeichneten Ladungszustand haben, damit die E_y -Komponente kompensiert wird. Das bedeutet für die Lösung dieses Problems, daß die Auswirkung der leitenden Fläche berücksichtigt werden kann durch Einführung eines zweiten Dipols, der wiederum den Abstand d von der Fläche hat und gleichphasig mit dem vorgegebenen Dipol erregt ist.

Das gleiche Ergebnis erhält man durch analoge Überlegung beim magnetischen Feld.

Das bisher Gesagte soll nun anhand eines Beispiels verdeutlicht werden.

1.3 Beispiel

Es soll das Richtdiagramm der Anordnung in *Bild 8* bestimmt werden. Der Dipol liege in der y - z -Ebene und habe den Abstand a von der z -Achse und den Abstand b von der y -Achse. Die x - z -Ebene und die x - y -Ebene seien leitende Flächen.

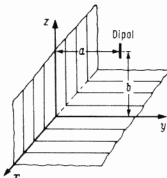


Bild 8. Anordnung des Dipols im betrachteten Beispiel

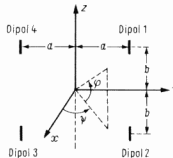
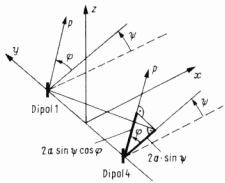


Bild 9. Ersatz der Dipolanordnung von Bild 8 durch eine Dipolgruppe aus den vier Dipolen 1, 2, 3, 4

Nach Abschnitt 1.1 und 1.2 muß das gesuchte Richtdiagramm identisch sein mit dem Richtdiagramm der Dipolgruppe in *Bild 9*. Die Erregung des Dipols 1 erfolgt mit der Amplitude A und der Phase Null. Für Dipol 2 gilt dann nach 1.2 ebenfalls die Amplitude A und die Phase Null. Die Dipole 3 und 4 müssen nach 1.1 mit der Amplitude A , aber mit der Phase π erregt werden.

Wir nehmen zunächst an, daß nur die beiden Dipole 1 und 4 vorhanden wären. Sie können, wenn wieder ein ferner Aufpunkt P betrachtet werden soll als auf der y -Achse liegend

Bild 10. Bestimmung des Wegunterschiedes für die Dipole 1 und 4. Beim Vergleich zu FtA At 11, Bild 12 bzw. Abschn. 2.1 beachte man, daß dort die Dipole auf der x -Achse, hier aber auf der y -Achse liegen. Dadurch ergibt sich der Unterschied in der Winkelfunktion für ψ , in At 11, Bild 12, $\cos \psi$, in At 12, Bild 10, $\sin \psi$



angenen werden. Mit *Bild 10* ergibt sich dann ein Wegunterschied von

$$\Delta s_{1,4} = 2 a \cdot \sin \psi \cdot \cos \varphi$$

und als

$$\delta_{s,1,4} = 2 a \cdot \frac{2 \pi}{\lambda} \cdot \sin \psi \cdot \cos \varphi$$

Der Gesamtphasenunterschied $\delta_{1,4} = (\delta_{s,1,4} + \delta_{p1})$ wird dann

$$\delta_{1,4} = \frac{2 a \cdot 2 \pi}{\lambda} \cdot \sin \psi \cdot \cos \varphi + \pi$$

Als Richtcharakteristik erhält man (s. FtA At 11, Abschn. 2.1)

$$A^*_{s,1,4} = 2 A \cdot \cos \varphi \cdot \cos \frac{\delta_{1,4}}{2} = 2 A \cdot \cos \varphi \cdot \cos \left(\frac{2 a \pi}{\lambda} \sin \psi \cdot \cos \varphi + \frac{\pi}{2} \right) \quad (1)$$

Die Richtcharakteristik $A^*_{s,2,3}$ für die Dipole 2 und 3 sieht ebenso aus, hat jedoch eine Phasenverschiebung von

$$\delta = \frac{2 b \cdot 2 \pi}{\lambda} \cdot \sin \varphi$$

gegenüber der erstgenannten Dipolteilgruppe.

Als Gesamtcharakteristik A_s erhält man somit

$$A_s = 2 \cdot A^*_{s,1,4} \cdot \cos \frac{\delta}{2} = 4 A \left[\cos \varphi \right] \left[\cos \left(\frac{2 a \pi}{\lambda} \cdot \sin \psi \cdot \cos \varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right] \left[\cos \left(\frac{2 b \pi}{\lambda} \cdot \sin \varphi \right) \right] \quad (2)$$

2 Flächenstrahler

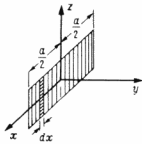
Es sollen nun noch die Richtcharakteristiken von Antennen untersucht werden, die nicht mehr aus Einzeldipolen bestehen, wie bisher besprochen. Wir haben es hier mit sogenannten Flächenstrahlern zu tun, wie sie für sehr hohe Frequenzen verwendet werden. Die Ströme in einer solchen Antenne können wieder, wie bei Dipolgruppen, in Amplitude und Phase verändert werden, so daß hier grundsätzlich die gleichen Möglichkeiten bestehen.

2.1 Flächenstrahler mit konstanter Phase der Ströme

2.1.1 Konstante Strombelegung

Zu bestimmen sei die Richtcharakteristik des Flächenstrahlers in *Bild 11*. Wir können uns diese Fläche unterteilt denken in unendlich viele kleine Abschnitte mit der Breite dx . Jeder

¹⁾ δ_s Phasenunterschied, bedingt durch Wegunterschied.
 δ_p Phasenunterschied in der Speisung der Einzeldipole, s. a. FtA At 11, Abschnitt 2.



◀ Bild 11. Beispiel eines Flächenstrahlers

Bild 13. ▶
Verlauf der Funktion $\frac{A_s}{K} = \frac{\sin u}{u}$
nach Gl. 4

derartige Abschnitt kann als Einzeldipol aufgefaßt werden, der in einem fernen Punkt P ein Feld mit der Amplitude dA erzeugt. Diese infinitesimal kleine Amplitude rührt daher, daß ein unendlich kleiner Dipol natürlich nur eine verschwindend kleine Strahlung hat.

Bei einer konstanten Strombelegung der Antenne ist

$$dA \sim dx$$

bzw. mit einem Proportionalitätsfaktor p

$$dA = p \cdot dx$$

Zur Bestimmung des Phasenunterschiedes δ_s der Strahlung eines beliebigen Abschnittes dx im Abstand x vom Ursprung

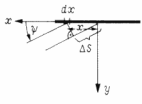


Bild 12. Ermittlung des Phasenunterschiedes gegen Antennennormale für ein Flächenelement dx des Flächenstrahlers, das vom Ursprung des Koordinatensystems den Abstand x hat

in bezug auf den Ursprung ist der Flächenstrahler in Bild 12 noch einmal gezeichnet mit Blickrichtung in -z-Richtung. Man entnimmt daraus, daß

$$\Delta s = x \cdot \cos \psi'$$

Damit wird der Phasenwinkel

$$\delta_s = \frac{\Delta s \cdot 2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \cos \psi'$$

Wir müssen nun – vollkommen analog zur Berechnung bei Dipolgruppen – die Amplituden dA unter Berücksichtigung der Phasenwinkel summieren. Die Summe geht jetzt allerdings in ein Integral über, und wir erhalten als Summenamplitude²⁾:

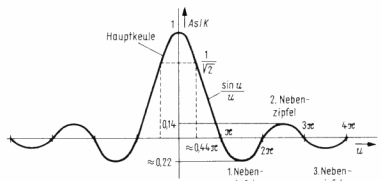
$$\underline{A}_s = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dA \cdot e^{j\delta_s} = p \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{j 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \psi'} \delta x \quad (3)$$

In Gl. 3 stellt der Integrand die Teilstrahlung eines Flächenelementes in komplexer Form dar. Man erhält:

²⁾ Um das Feld einer Dipolgruppe in einem Aufpunkt P zu berechnen, ist die Summe der Felder der Einzeldipole – unter Berücksichtigung der jeweiligen Amplitude und Phase – zu bilden. Will man nur die Summenamplitude erhalten, so kann dem Feldvektor eines beliebigen Dipols aus der Dipolgruppe die Phase 0 zugeordnet werden; die Feldvektoren der anderen Dipole haben dann relativ zu diesem Bezugsvektor die Phase δ_r , wobei r eine Laufzahl ist. Die Phase δ_r wird mathematisch durch den Faktor $e^{j\delta_r}$ berücksichtigt, so daß sich als Summenamplitude ergibt

$$|A| = \sum_{v=1}^n A_v a^{j\delta_v}$$

hierbei gibt n die Anzahl der Einzeldipole an, A_v ist die Feldamplitude des r-ten Einzeldipols und δ_v seine Phase. Diese Summe geht unmittelbar in Gl. 3 über, wenn man Flächenstrahler betrachtet.



$$\underline{A}_s = p \cdot \frac{1}{j \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos \psi'} \cdot e^{j 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \psi'} \Big|_{-a/2}^{a/2}$$

Mit

$$e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x$$

ergibt sich

$$\underline{A}_s = p \frac{\sin\left(\pi \frac{a}{\lambda} \cdot \cos \psi'\right)}{\frac{\pi}{\lambda} \cos \psi'} = p \cdot a \cdot \frac{\sin\left(\pi \frac{a}{\lambda} \cos \psi'\right)}{\pi \frac{a}{\lambda} \cos \psi'} \quad (4)$$

$$\underline{A}_s = K \cdot \frac{\sin u}{u} \quad \text{mit } p \cdot a = K \text{ und } \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \cos \psi' = u$$

Die Funktion $\frac{A_s}{K} = \frac{\sin u}{u}$ zeigt Bild 13. Da u sich zwischen

$-\pi \frac{a}{\lambda}$ und $+\pi \frac{a}{\lambda}$ bewegen kann, sieht man, daß die Richtcharakteristik um so mehr Nebenzipfel enthält, je größer $\frac{a}{\lambda}$ wird, bzw. je größer die Antennengröße a bei vorgegebener Wellenlänge λ ist.

Die Hauptstrahlungsrichtung ergibt sich für

$$u = \pi \frac{a}{\lambda} \cos \psi' = 0$$

woraus $\psi' = 90^\circ$ folgt.

Der Winkel, bei dem die Strahlungsdichte auf $\frac{1}{\sqrt{2}}$ abgesunken ist, ergibt sich aus

$$u_0 = \frac{\pi a}{\lambda} \cos \psi_0 \approx 0,44 \pi$$

und daraus

$$\cos \psi_0' = \frac{0,44 \lambda}{a} \quad (5)$$

Mit steigendem a, d. h. mit einer großen Antenne nähert sich ψ_0' immer mehr dem Wert $\frac{\pi}{2}$. Das bedeutet, daß der Öffnungswinkel der Antenne immer kleiner und die Bündelung immer besser wird. $\psi' = \frac{\pi}{2}$ ist die Hauptstrahlungsrichtung.

Der Öffnungswinkel ψ_H der Antenne ergibt sich aus

$$\psi_H = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \psi_0' \right)$$

Setzt man daraus ψ_0' in Gl. 5 ein, so wird

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi_H}{2} \right) = \sin \frac{\psi_H}{2} = \frac{0,44 \lambda}{a}$$

Bild 15. ▶

Verlauf von $\frac{A_s}{K}$ nach Gl. 7

◀ Bild 14a. Richtdiagramm eines Flächenstrahlers, bei dem $\frac{a}{\lambda} = 3$ ist (a = Länge der Strahlungsfläche, Bild 11)

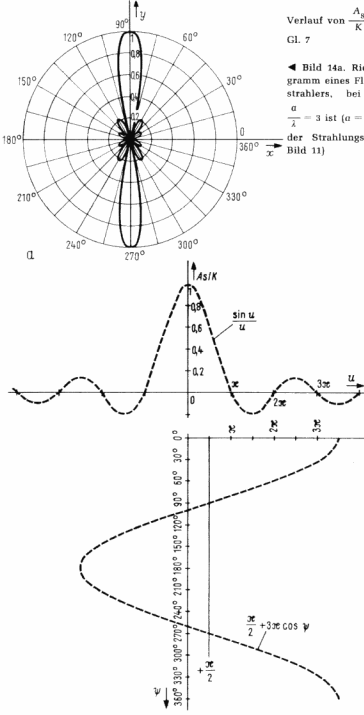
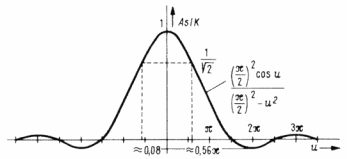


Bild 14b. Kurven zur grafischen Bestimmung dieses Richtdiagramms. Beispiel: für $\psi = 60^\circ$ erhält man aus dem unteren Diagramm $u = \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \cos \psi = \pi \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 1,5 \cdot \pi$. Aus dem oberen Diagramm: $\frac{A_s}{K} = \frac{\sin u}{u}$ entnimmt man für $u = 1,5 \cdot \pi$: $\frac{A_s}{K} = 0,2$. Dieser Wert ist in Bild 14 für $\psi = 60^\circ$ eingetragen

und für große a :

$$\sin \frac{\psi_H}{2} \approx \frac{\psi_H}{2} = \frac{0,44 \lambda}{a}$$

Damit läßt sich ψ_H sofort angeben.

Die Auswertung der Gl. 4 für $\frac{a}{\lambda} = 3$ zeigt Bild 14.

Obwohl die Nebenzipfel bei einer gleichmäßigen Strombelegung der Antenne nicht sehr störend sind (die Amplitude der Feldstärke ist im 1. Nebenzipfel bereits auf etwa 20% abgesunken), möchte man in manchen Anwendungsgebieten eine bessere Nebenzipfelfreiheit. Diese läßt sich durch eine Abnahme der Ströme zu den Rändern der Antenne hin erreichen.

2.1.2 Cos-förmige Strombelegung

Die Antenne sieht genauso aus wie in Bild 11 gezeigt, jedoch sollen die Amplituden der Ströme zu den Rändern hin cos-förmig abnehmen. Die Richtcharakteristik ergibt sich unmittelbar, wenn man in Gl. 3 die Konstante p durch

$p \cdot \cos \frac{\pi x}{a}$ ersetzt. Somit wird

$$A_s = p \int_{-a/2}^{+a/2} \cos \frac{\pi x}{a} \cdot e^{j \frac{2 \pi x}{\lambda} \cos \psi} dx \quad (6)$$

Darin ist p jetzt die Amplitude des Stromes bei $x = 0$.

Das Integral in Gl. 6 ist rekursiv und läßt sich leicht lösen. Es gilt allgemein:

$$\int \cos mx e^{nx} dx = \frac{1}{n^2 + m^2} e^{nx} [n \cdot \cos mx + m \cdot \sin mx]$$

Damit wird aus Gl. 6²⁾:

$$A_s = |A_s| = pa \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos \left(\frac{\pi a}{\lambda} \cos \psi \right)}{\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(\frac{\pi \cdot a}{\lambda} \cos \psi \right)^2} = K \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cos u}{\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - u^2} \quad (7)$$

mit $u = \frac{\pi a}{\lambda} \cos \psi$ und $K = p \frac{2 a}{\pi}$

Die Konstante K ist jetzt so gewählt, daß für $u = 0$ $\frac{A_s}{K} = 1$ wird. Den Verlauf von $\frac{A_s}{K}$ zeigt Bild 15. Man sieht daß die Nebenzipfel tatsächlich viel kleiner sind, als sie in Bild 13 waren.

Man bezeichnet dieses Verfahren zur Verringerung der Nebenzipfel als „Prinzip der unterdrückten Randstrahlung“. Es findet auch Anwendung bei den schon früher besprochenen Dipolgruppen.

Die Hauptstrahlungsrichtung tritt für

$$u = 0 \text{ bzw. } \psi = 90^\circ$$

auf.

Die Nullstellen der Strahlung liegen bei $u = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$

mit $n = 1, 2, \dots$ wobei es von $\frac{a}{\lambda}$ abhängt, welchen Höchstwert

die Laufzahl n annehmen kann. Für $\frac{a}{\lambda} < \frac{3}{2}$ treten überhaupt keine Nullstellen und keine Nebenzipfel auf.

Aus Bild 15 ist weiter zu ersehen, daß die Halbwertsbreite größer ist als bei der Antenne mit konstanter Strombelegung. Dies ist eine typische Erscheinung. Die Nebenzipfelfreiheit wird besser auf Kosten der Richtwirkung.

2) Siehe Anhang.

2.2 Flächenstrahler mit Strömen konstanter Amplitude und verschiedener Phase

Wir wollen uns hier auf den einfachsten Fall beschränken, und zwar soll sich die Phase proportional zu x verändern, wenn die Antenne so steht, wie in Bild 11. Zu unterscheiden sind wieder zwei Phasenwinkel δ_s und δ_p , wobei δ_s der Winkel ist, der sich durch einen Wegunterschied ergibt, während δ_p von der Speisung der Antenne abhängt.

δ_s hatten wir bereits in Abschnitt 2.1.1 berechnet. Es war

$$\delta_s = 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \psi$$

Der Winkel δ_p ergibt sich voraussetzungsgemäß zu

$$\delta_p = \Delta \cdot x$$

wobei Δ ein Proportionalitätsfaktor ist (Dimension: Grad pro Längeneinheit).

Die Gesamphase δ ergibt sich aus

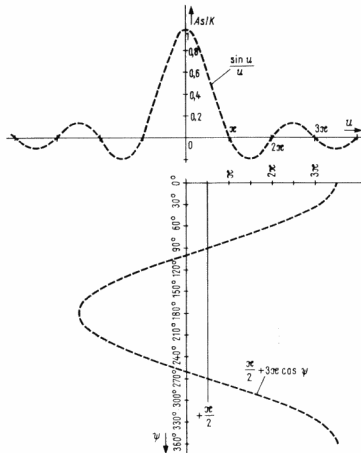
$$\delta = \delta_s + \delta_p = x \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cos \psi + \Delta \right) \quad [7]$$

Die Richtcharakteristik ergibt sich unmittelbar mit Gl. 3, wenn man dort δ_s durch δ aus Gl. (7) ersetzt.

Es wird

$$A_s = p \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{j2\pi x \left(\frac{\cos \psi}{\lambda} + \frac{\Delta}{2\pi} \right)} \cdot dx$$

$$= p \cdot \frac{\sin \left[\left(\frac{1}{\lambda} \cos \psi + \frac{\Delta}{2\pi} \right) a\pi \right]}{\pi \left(\frac{1}{\lambda} \cos \psi + \frac{\Delta}{2\pi} \right)}$$



$$\text{bzw. } A_s = p \cdot a \left. \begin{aligned} & \frac{\sin \left[a\pi \left(\frac{1}{\lambda} \cos \psi + \frac{\Delta}{2\pi} \right) \right]}{a\pi \left(\frac{1}{\lambda} \cos \psi + \frac{\Delta}{2\pi} \right)} \\ & \frac{A_s}{K} = \frac{\sin u}{u} \end{aligned} \right\} \quad [8]$$

mit $K = p \cdot a$ und $u = a\pi \left(\frac{1}{\lambda} \cos \psi + \frac{\Delta}{2\pi} \right)$

Die Auswertung der Gl. 8 für $\frac{a}{\lambda} = 3$ und $\Delta = \frac{\pi}{a}$ erfolgt grafisch (Bild 16). Hierbei ist Δ so gewählt, daß die Phasendrehung an den Antennenrändern gerade $\pm \pi/2$ wird. Das Ergebnis zeigt Bild 17.

Die Hauptstrahlungsrichtung liegt bei $u = 0$. Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{\lambda} \cos \psi + \frac{\Delta}{2\pi} = 0$$

bzw.

$$\cos \psi = -\frac{\lambda}{2\pi} \cdot \Delta$$

Für $\Delta = 0$, d. h. konstante Phase auf der ganzen Antenne, liegt die Hauptstrahlungsrichtung bei

$$\psi = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{(Querstrahler)}$$

wie bereits in Abschnitt 2.1.1 gezeigt.

Für endliche Δ weichen die Hauptstrahlungsrichtungen von $\pm \frac{\pi}{2}$ ab und zwar beide zur $-x$ -Achse hin. In der Praxis strebt man an, daß die beiden Hauptkeulen zusammenfallen. Dies ist der Fall, wenn

$$\frac{\lambda}{2\pi} \cdot \Delta = 1$$

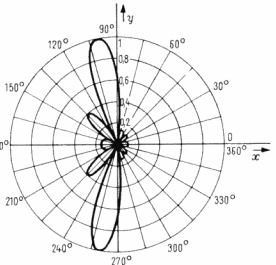
bzw.

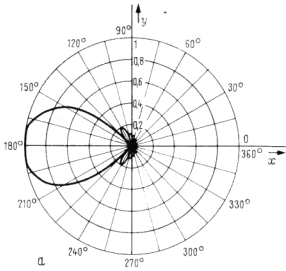
$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

wird. Aus dem Querstrahler ist jetzt ein Längsstrahler geworden. Die Richtcharakteristik für $\frac{a}{\lambda} = 3$ zeigt Bild 18.

◀ Bild 16. Kurven zur grafischen Bestimmung des Richtdiagramms von Bild 17

► Bild 17. Richtdiagramm, gegeben durch Gl. 8, für den Fall eines Flächenstrahlers mit Strömen konstanter Amplitude, aber einer proportional zu x veränderlichen Phase





◀ Bild 18a. Richtdiagramm eines Längsstrahlers. $\frac{a}{\lambda} = 3$ ($a =$ Länge der Strahlungsfläche, Bild 11)

Für das $\int \sin mx \cdot e^{nx} dx$ wird die gleiche Rechenoperation wiederholt mit

$$u' = e^{nx}, \text{ also } u = \frac{1}{n} \cdot e^{nx} \text{ und}$$

$$v = \sin mx, \text{ also } v' = m \cdot \cos mx$$

$$\int \sin mx \cdot e^{nx} dx = \frac{1}{n} \sin mx \cdot e^{nx} - \frac{m}{n} \int \cos mx \cdot e^{nx} dx.$$

Eingesetzt in Gl. 21, ergibt:

$$\int \cos mx \cdot e^{nx} dx = \frac{1}{n} \cos mx \cdot e^{nx} + \frac{m}{n} \left[\frac{1}{n} \sin mx \cdot e^{nx} - \frac{m}{n} \int \cos mx \cdot e^{nx} dx \right]$$

$$\begin{aligned} \int \cos mx \cdot e^{nx} dx &= \frac{1}{1 + \frac{m^2}{n^2}} \left[\frac{1}{n} \cos mx \cdot e^{nx} + \frac{m}{n^2} \sin mx \cdot e^{nx} \right] \\ &= \frac{1}{n^2 + m^2} \cdot e^{nx} [n \cdot \cos mx + m \cdot \sin mx] \end{aligned}$$

Dabei ist: $m = \frac{\pi}{a}$ und $n = j \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos \psi$

Dann wird Gl. 6 wie folgt geschrieben:

$$\begin{aligned} \underline{A}_x &= p \cdot \frac{1}{m^2 + n^2} \left\{ e^{n \cdot \frac{a}{2}} \left(n \cdot \cos \frac{\pi \cdot a}{a} \cdot \frac{a}{2} + m \cdot \sin \frac{\pi \cdot a}{a} \cdot \frac{a}{2} \right) - e^{-n \cdot \frac{a}{2}} \left(n \cdot \cos - \frac{\pi \cdot a}{a} \cdot \frac{a}{2} \right) + m \cdot \sin \left(- \frac{\pi \cdot a}{a} \cdot \frac{a}{2} \right) \right\} \\ &= p \frac{1}{m^2 + n^2} \left\{ e^{n \cdot \frac{a}{2}} (0 + m \cdot 1) - e^{-n \cdot \frac{a}{2}} (0 + m \cdot [-1]) \right\} \\ &= p \frac{1}{m^2 + n^2} \cdot m \left\{ e^{n \cdot \frac{a}{2}} + e^{-n \cdot \frac{a}{2}} \right\} \\ \underline{A}_s &= pm \cdot \frac{1}{m^2 + n^2} \cdot \left\{ e^{j \frac{\pi a}{\lambda} \cos \psi} + e^{-j \frac{\pi a}{\lambda} \cos \psi} \right\} \end{aligned}$$

[s. a. FtA Mth 21]
[Abschn. 3]

$$\begin{aligned} &= pm \cdot \frac{1}{m^2 + n^2} \cdot \left\{ \cos \frac{\pi a}{\lambda} \cos \psi + j \sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \cos \psi \right) + \cos \left(\frac{\pi a}{\lambda} \cdot \cos \psi \right) - j \sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \cdot \cos \psi \right) \right\} \\ \underline{A}_s &= 2 pm \cdot \frac{1}{m^2 + n^2} \cdot \cos \left(\frac{\pi a}{\lambda} \cdot \cos \psi \right) \\ &= 2 \cdot p \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos \psi \right)^2} \cdot \cos \left(\frac{\pi a}{\lambda} \cdot \cos \psi \right) \\ \underline{A}_s &= p \cdot a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos \left(\frac{\pi a}{\lambda} \cdot \cos \psi \right)}{\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(\frac{\pi \cdot a}{\lambda} \cdot \cos \psi \right)^2} \end{aligned}$$

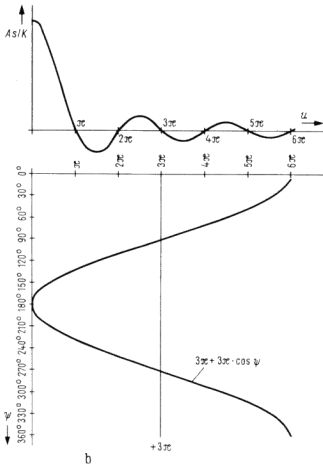


Bild 18b. Kurven zur grafischen Bestimmung des Richtdiagramms von Bild 18

Anhang

$\int \cos mx \cdot e^{nx} dx$ wird nach der Methode der „teilweisen Integration“ berechnet. Danach gilt:

$$\int u' \cdot v \cdot dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

Mit $u' = e^{nx}$, also $u = \frac{1}{n} e^{nx}$ und

$$v = \cos mx, \text{ also } v' = -m \cdot \sin mx$$

ergibt sich:

$$\int \cos mx \cdot e^{nx} dx = \frac{1}{n} \cos mx \cdot e^{nx} + \frac{m}{n} \int \sin mx \cdot e^{nx} dx \tag{21}$$