

Verformung von Impulsen durch Kopplungselemente

Fi 33

2 Blätter

1. Definition

Der Arbeitstitel müßte eigentlich lauten: Der Einfluß differenzierender und integrierender Kopplungselemente auf die Impulsübertragung, denn hier soll die Verformung eines Impulses untersucht werden, wenn er einen Hoch- oder Tiefpaß passiert.

Es ist bekannt, daß Kopplungselemente mit Tiefpaß-Charakter integrierende und solche mit Hochpaß-Charakter differenzierende Eigenschaften besitzen. Man erkennt dies, wenn das Kopplungsglied genügend genau durch eine einzige Zeitkonstante beschrieben werden kann; dann lassen sich nämlich die Kopplungselemente durch einfache RC-Glieder ersetzen. Welchen Einfluß die differenzierende bzw. integrierende Wirkung auf die Impulsübertragung hat, soll an diesen einfachen RC-Gliedern gezeigt werden.

2. Die Integration

Schickt man einen Rechteckimpuls über einen Tiefpaß, so wird er, wie Bild 1 zeigt, verformt. Dabei hängt es von dem Verhältnis $t_i : T$ ab, wie weit die Form des Impulses nach Durchlaufen des Tiefpaßgliedes von der ursprünglichen Form abweicht. In dem Ausdruck $t_i : T$ (bzw. t_i/T) bedeuten:

- t_i = zeitliche Länge des Impulses
- T = Zeitkonstante des Tiefpasses

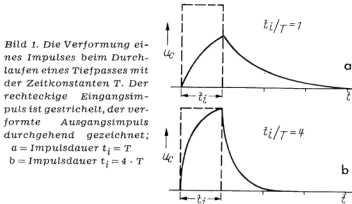
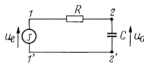


Bild 2. Tiefpaß, gebildet aus R und C, gespeist von einem Rechteck-impuls-generator (Spannungsgenerator mit $R_i = 0$)



Erklärung der Impulsverzerrung

Als Tiefpaß werde ein RC-Glied nach Bild 2 angenommen. Wird an dessen Eingang 1-1' eine Impulsspannung gelegt, dann steigt die Spannung am Ausgang 2-2' des RC-Gliedes nicht sprunghaft wie die Eingangsspannung an, denn die Kapazität C muß erst allmählich über den Widerstand R aufgeladen werden. In den Funktechnischen Arbeitsblättern (FtA) Mth 11 ist gezeigt, daß dieser Spannungsanstieg nach einem Exponentialgesetz erfolgt:

$$u_c = U_0(1 - e^{-t/T})$$

Die Form des Spannungsanstiegs ist also nur durch die Spannung U und die Zeitkonstante T bestimmt. Die Spannung kann dabei außer Betracht bleiben, wenn man für U den normierten Wert 1 setzt.

In Bild 3 ist eine solche Anstiegskurve für eine gegebene Zeitkonstante T gezeichnet. Man sieht, daß es von der relativen Impulslänge abhängt, welcher Spitzenwert der Ausgangsspannung erreicht wird.

Für die Form der Rückflanke sind zwei Punkte wichtig:

- a) der Beginn der Spannungsabnahme, d. h. die Zeitdifferenz zwischen Spannungsanstieg und Beginn des Spannungsabfalls beim Impuls,
- b) die Zeitkonstante des RC-Gliedes.

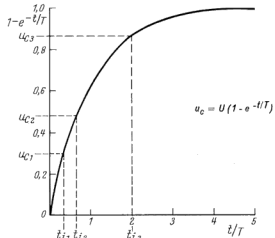


Bild 3. Verlauf des Spannungsanstiegs am Kondensator C des Tiefpasses von Bild 2

Gilt für die Rückflanke, also die Entladung des Kondensators, die gleiche Zeitkonstante T, dann verläuft der Spannungsabfall nach der Gleichung (FtA Mth 11/2a)

$$u_c = U_0 \cdot e^{-t/T}$$

Diese Entladung setzt ein, wenn die Rückflanke beginnt, d. h. die Impulsspannung abnimmt, ganz gleichgültig, bis auf welche Spannungsamplitude der Kondensator in der Zeit t_i aufgeladen war.

Dadurch erklären sich die in Bild 4 gezeigten unterschiedlichen Spannungsverläufe am Integrationskondensator (s. a. Abschnitt 6.1. Mathematische Ableitung).

3. Die Differentiation

Zugrunde liegt ein Hochpaß nach Bild 6. Die Verformung eines Rechteckimpulses ergibt sich in folgender Weise. Dabei ist auch hier wieder das Verhältnis $t_i : T$ maßgebend.

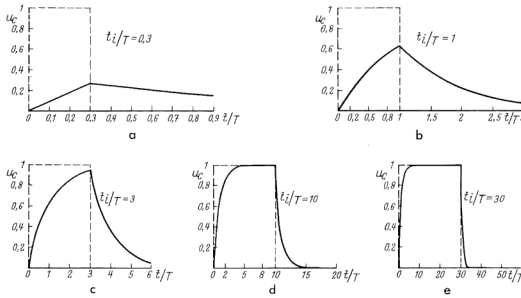
- t_i = zeitliche Länge des Impulses,
- T = Zeitkonstante des Hochpasses

Erklärung der Impulsverzerrung

Die Spannung an den Ausgangsklemmen 2-2' ist dem Strom proportional, der durch den Widerstand R fließt. Das ist aber der Ladestrom des Kondensators, wenn an die Klemmen 1-1' ein Impuls gelegt wird.

Nach FtA Mth 11/2a gilt für den Ladestrom die Exponentialgleichung

$$i_c = I_0 \cdot e^{-t/T}$$



Da die Ausgangsspannung $u_{22} = i_c \cdot R$ ist, ist der Spannungsvlauf an den Ausgangsklemmen durch die gleiche Exponentialfunktion bestimmt (Bild 5).

Nach Ablauf der Zeit t_i (zeitliche Impulslänge) wird die Aufladung beendet und die Entladung eingeleitet. Daraus ergibt sich für die Entladekurve folgendes:

Der Entladestrom hat das umgekehrte Vorzeichen wie der Ladestrom. Liegt die Ladekurve auf der positiven Seite des $i(t)$ - oder $u(t)$ -Diagramms, so liegt die Entladekurve auf der negativen Seite.

Die beim Entladevorgang abfließende Ladungsmenge ist gleich der beim Laden gespeicherten, d. h. die durch Lade- und Entladekurve gegebenen Flächen müssen einander gleich sein oder, anders ausgedrückt, wegen der C-Kopplung zwischen Ein- und Ausgang muß der Gleichstromwert sein.

Aus diesen Überlegungen erklären sich die in Bild 7 dargestellten Spannungsvläufe, die entstehen, wenn ein Rechteck-Impuls über einen Hochpaß gegeben wird. Dabei sind verschiedene Verhältnisse $t_i : T$ zugrunde gelegt (s. a. Abschnitt 6.2, Mathematische Ableitung).

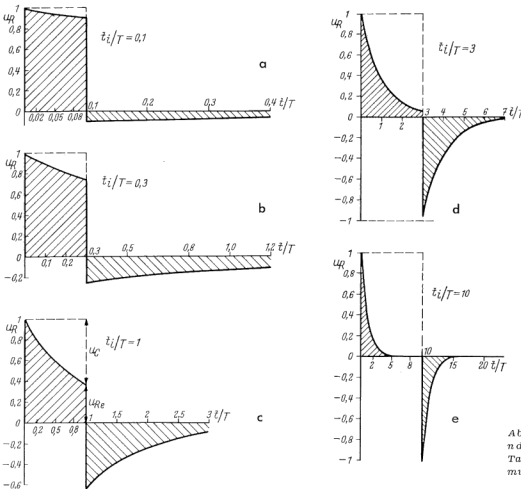


Bild 4. Der Spannungsvlauf am Ausgang eines Tiefpasses in Abhängigkeit von t_i/T . Die Konstruktion geschieht an Hand der Tabellen der e-Funktion (z. B. in FTA Mth 11/2) in folgender Weise (Beispiel Bild 4c).

Für den Spannungsanstieg gilt Tabelle 5 und 6 von Mth 11/2. Für $t_i/T = 0,5, 1,0, 2,0, 3,0$ wird eine Amplitude von $0,293, 0,632, 0,865, 0,950$ abgelesen.

Dem Spannungsabfall nach Beendigung des Impulses liegt die Funktion $e^{-t/T}$ zugrunde, hierfür gilt Tabelle 3 und 4 von Mth 11. Dabei sind im Beispiel $t_i/T = 3,0$ alle entnommenen Tabellenwerte mit $0,950$ zu multiplizieren, denn die Tabellenwerte gelten für eine Anfangsamplitude mit dem normierten Wert 1. Die Anstiegskurve erreicht aber für $t_i/T = 3$ nur den Wert $0,950$. Ferner sind die t_i/T -Werte um 3 zu vermindern, ehe die Tabelle benutzt wird. Also gilt:

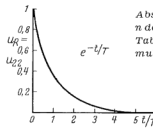


Bild 5. Verlauf des Spannungsanstiegs am Widerstand R des Hochpasses von Bild 5 $u_R = I_0 \cdot R \cdot e^{-t/T} = U_{22}'$

Abzisse von Bild 4c	3,5	4,0	6,0
n der Tabelle 3 oder 4	0,5	1,0	2,0
Tabellenwert	0,607	0,368	0,498
multipliziert mit 0,950	0,577	0,35	0,473



Bild 6. Hochpaß, gebildet aus Kapazität C und Widerstand R

Bild 7. Der Spannungsvlauf am Ausgang eines Hochpasses in Abhängigkeit von t_i/T . Erläuterung der Konstruktion an Hand von Bild 7c. Für das Abstrinken des Kondensatorladestroms und damit der Spannung u_R gelten die Tabellen 3 und 4 von Mth 11/2. Also für $t_i/T = 0,2, 0,5, 1,0$

$u_R = 0,819, 0,607, 0,368$
 Im Zeitpunkt $t_i/T = 1$ (Impuls-Ende) wird die weitere Aufladung abgebrochen. Am Kondensator steht dabei die Differenz aus Impulsspannung u_i und u_R , d. h. $u_c = u_i - u_R$, also für den Zeitpunkt $t_i/T = 1$: $u_c = 1 - 0,368$. Der Kondensator entlädt sich und schickt einen Strom in umgekehrter Richtung durch R. Für die Entladung gilt also:

$$-u_R = R \cdot I_c \cdot e^{-t/T} = R \cdot \frac{u_c}{R} \cdot e^{-t/T} = u_c \cdot e^{-t/T}$$

I_c ist der Entladestrom bei Entladungsbeginn $I_c = \frac{u_c}{R} = \frac{1 - u_R}{R}$

u_R = Spannung an R am Impuls-Ende bzw. am Entladungsanfang. Im Beginn der Entladung ist also $u_R = -u_c$, in diesem Fall = $-(1 - 0,368) = -0,632$. Die Abnahme erfolgt nach den Tabellen 3 und 4 von Mth 11, also:

Abzisse von Bild 7c	1,0	1,5	2,0
n der Tabelle 3 oder 4	0	0,5	1,0
Tabellenwert	1	0,607	0,368
multipliziert mit -0,632	-0,632	-0,384	-0,232

4. Folgerungen und Vergleich

Verlangt man, daß der Rechteckimpuls möglichst formgetreu, also möglichst unverzerrt übertragen wird, so gilt

für einen Tiefpaß: $t_i > 5 T$

für einen Hochpaß: $t_i < 0,2 T$

$t_i =$ Impulslänge $T =$ Zeitkonstante

Bei einem Tiefpaß ist also die Forderung einer formgetreuen Übertragung von einer Mindestimpulslänge an gesichert.

Bei einem Hochpaß werden umgekehrt alle unter einer maximalen Impulslänge liegenden Impulse unverzerrt übertragen.

5. Impulsfolge

In den Abschnitten 1 bis 4 ist jeweils nur ein einzelner Rechteckimpuls betrachtet worden. Es entsteht die Frage nach der Übertragung einer Impulsfolge.

5.1. Tiefpaß

Wählt man für einen Tiefpaß die RC-Glieder so, daß $t_i/T = 10$ ist und damit beim Durchgang die Impulsform angehört erhalten bleibt, so sieht man aus Bild 4d, daß der Abstand zweier aufeinanderfolgender Impulse größer als $15 t/T$ sein muß, denn der neue Impuls darf erst dann einsetzen, wenn der vorhergehende völlig abgeklungen, also der Kondensator entladen ist.

Folgen die Impulse zu dicht aufeinander, dann entsteht ein Spannungsverlauf am Ausgang 2-2' des Tiefpasses, wie in Bild 8 gezeigt. Der Kondensator wird dann allmählich auf eine Gleichspannung aufgeladen, da die während der Impulse zugeführte Ladungsmenge größer als die in den Pausen entnommene Ladungsmenge ist. Dieser Fall ist von dem RC-Glied hinter einem Gleichrichter bekannt.

Wie Bild 9 zeigt, gilt für eine Impulsfolge, wenn die Impulsform angehört erhalten bleiben soll:

Impulslänge $t_i > 5 T$

Impulspause $t_i > 5 T$

Dauer einer Impulsperiode $t_p > 10 T$

Impulsfolgefrequenz $< \frac{1}{10 T}$

5.2. Hochpaß

Hier ist besonders der Unterschied zwischen dem Tiefpaß (Bild 2) und dem Hochpaß (Bild 6) zu beachten, der darin besteht, daß im letzteren Fall die Gleichstromkomponente nicht überträgt wird. Während also bei dem Tiefpaß, d. h. bei Übertragung des Gleichstromwertes, eine lange Impulspause vorhanden sein muß, um den Kondensator völlig zu entladen, so daß damit der neue Impuls bei den gleichen Pegelwerten beginnt und endet wie der vorhergehende, ist das bei dem Hochpaß (Wechselstromkopplung) nicht der Fall. Hier verschiebt sich die Null-Linie zwischen Eingangs- und Ausgangsimpuls (Bild 10). Die von der Impulskurve umschriebenen Flächen oberhalb und unterhalb dieser neuen Null-Linie müs-

sen einander gleich sein. Die Differenz zwischen dieser und der Null-Linie der Impulskette vor dem Hochpaß bedeutet eine Gleichspannung, die am Kondensator steht.

Daraus ergibt sich weiter, daß die lange Impulslücke, wie beim Tiefpaß besprochen, hier nicht nötig ist. Es gilt nur die bereits im Abschnitt 4 genannte Bedingung.

Impulsdauer $t_i < 0,2 T$

Dauer einer Impulsperiode $t_p < 0,4 T$

Impulsfrequenz $> \frac{1}{0,4 T} = > \frac{2,5}{T}$

6. Anhang

6.1. Ableitung der Formeln für den Tiefpaß

Nach Bild 2 gilt:

$u_a - u_g = i \cdot R$

$u_g = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$

$u_g = \frac{du_g}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i$

$u_a - u_g = RC \cdot \dot{u}_a = T \cdot \dot{u}_a$

$\dot{u} = \frac{du}{dt} =$ zeitliche Ableitung

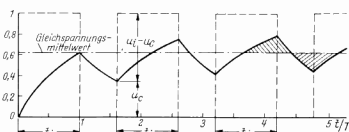


Bild 8. Impulsfolge, die einen Tiefpaß durchläuft. Die Konstruktion des Spannungsverlaufes erfolgt wie bei Bild 4. Im Zeitpunkt $t/T = 1,6$ ist die Spannung am Kondensator (Bild 2) noch nicht auf Null abgeklungen. Die treibende Spannung für den zweiten Ladevorgang ist: $u_i - u_c$. So berechnet sich die Amplitude für den Abzinswert $t/T = 2$:

n (für Tabelle 3 aus FTA Mth 11/2) = $2 - 1,6 = 0,4$
 $1 - e^{-n}$ (für $n = 0,4$) = $0,336$. Dieser Wert ist mit der treibenden Spannung $u_i - u_c = 1 - 0,336 = 0,664$ zu multiplizieren und u_c hinzuzuzählen $0,336 \times 0,65 + 0,33 = 0,545$. Da bei dem Tiefpaß nach Bild 2 der Gleichstromwert mit übertragen wird, müssen die zeitlichen Mittelwerte der Impulskurve vor und hinter dem Tiefpaß im eingeschungenen Zustand einander gleich sein. Wie Bild 8 zeigt, ist diese Bedingung erfüllt. Schon nach dem dritten Impuls sind die beiden schraffierten Flächen - oberhalb und unterhalb des Gleichstrommittelpunktes einander fast gleich

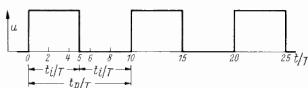


Bild 9. Bedingungen für annähernd formgetreue Übertragung einer Impulsfolge über einen Tiefpaß

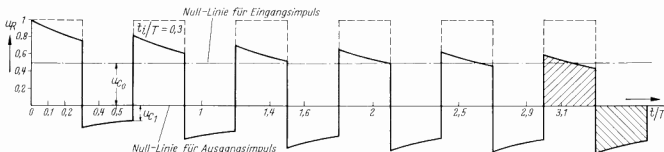


Bild 10. Impulsfolge, übertragen über einen Hochpaß. Die Konstruktion erfolgt wie für Bild 7 angegeben. Zu beachten ist nur, daß bei den einzelnen Impulsen jeweils verschiedene Werte für die treibende Spannung eingesetzt werden müssen. Bei Impuls 1 ist diese Spannung $u_i = 1$, denn der Kondensator ist völlig entladen, bei Impuls 2 aber nur noch $u_i - u_{c1}$, denn nach Beendigung der ersten Impulsperiode ($t/T = 0,6$) führt der Kondensator noch die Restspannung $u_{c1} = 0,18$. Die Werte von Tabelle 3 aus FTA Mth 11/2 zwischen $t/T = 0,6$ bis $t/T = 0,9$ müssen also mit $0,82$ multipliziert werden.

Beispiel: $t_p/T = 0,7$; $n = 0,7 - 0,6 = 0,1$
 $e^{-n} = 0,905$, multipliziert mit $0,82$ gibt $0,74$. Man erkennt den Unterschied zu Bild 8. Bei Bild 10 wird der Gleichstromwert nicht mit übertragen. Vor dem Hochpaß schwankt die Impulskurve um den Gleichstrommittelpunkt $0,5$. Nach Durchlaufen des Hochpasses pendelt die Spannung um die Nullachse. Umgekehrt nach dem sechsten Impuls ist der eingeschungenene Zustand erreicht. Die beiden schraffierten Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse sind annähernd einander gleich

Fi 33

Die Lösung einer solchen Differential-Gleichung lautet:

$$u_a = u_{a0} \cdot e^{-t/T} + \frac{1}{T} \int_0^t e^{-\frac{t-r}{T}} u_e(r) dr$$

u_{a0} = Anfangswert der Ausgangsspannung.

Man sieht, daß tatsächlich bei einem solchen Tiefpaßglied die Ausgangsspannung vom Integral über die Eingangsspannung u_e abhängig ist. Das wird besonders deutlich, wenn die Zeitkonstante T sehr groß ist, denn dann wird der Faktor $e^{-\frac{t-r}{T}}$ unter dem Integral gleich eins.



Bild 11. Impulsform für die Berechnung nach 6.1

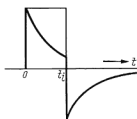


Bild 12. Impulsform für die Berechnung nach 6.2

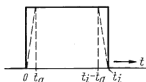


Bild 12a. Impuls mit abgeschrägten Flanken zur Näherungsrechnung von Abschnitt 6.2

Für rechteckige Impulse von der Dauer t_i erhält man dann für $u_{a0} = 0$:

6.1.1. wenn der betrachtete Zeitpunkt zwischen

$t = 0$ und $t = t_i$ liegt, also $0 < t < t_i$ (Bild 11)

$$u_a = \frac{1}{T} \cdot u_e \int_0^t e^{-\frac{t-r}{T}} dr = \left[u_e \cdot e^{-\frac{t-r}{T}} \right]_0^t = u_e \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

6.1.2. wenn $t > t_i$ ist (Bild 11).

$$u_a = \frac{1}{T} \cdot u_e \int_0^{t_i} e^{-\frac{t-r}{T}} dr = \left[u_e \cdot e^{-\frac{t-r}{T}} \right]_0^{t_i} = u_e \left(e^{-\frac{t-t_i}{T}} - e^{-\frac{t}{T}} \right) = u_e \cdot e^{-\frac{t}{T}} \left(e^{\frac{t_i}{T}} - 1 \right)$$

Als obere Integrationsgrenze wird t_i und nicht t eingesetzt, denn es ist nämlich nach der Ausgangsgleichung über die Impulslänge zu integrieren ($\int u_e(r) dr$), diese endet aber nach Bild 11 bei t_i .

6.2. Ableitung der Formeln für den Hochpaß

Nach Bild 5 gilt:

$$u_e - u_a = \frac{1}{C} \int i dt \quad ; \quad u_a = i \cdot R$$

$$\dot{u}_e - \dot{u}_a = \frac{1}{C} \cdot i$$

$$\dot{u}_e - \dot{u}_a = \frac{u_a}{C \cdot R} = \frac{u_a}{T}$$

Ist die Zeitkonstante T sehr klein gegenüber den Änderungszeiten von u_e , also $\dot{u}_a \approx \frac{du_a}{dt} \approx 0$, dann ist angenähert

$$u_a \approx T \cdot \dot{u}_e$$

Dies zeigt den differenzierenden Charakter des Hochpasses.

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$u_a = u_{a0} \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \int_0^t e^{-\frac{t-r}{T}} \cdot \dot{u}_e(r) dr$$

Für rechteckige Impulse von der Dauer t_i erhält man dann für $u_{a0} = 0$:

6.2.1. wenn der betrachtete Zeitpunkt zwischen $t = 0$ und $t = t_i$ liegt, also $0 < t < t_i$ (Bild 12):

$$u_a = u_e \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

6.2.2. wenn $t > t_i$ ist (Bild 12)

$$u_a = u_e \cdot e^{-\frac{t}{T}} \left(1 - e^{-\frac{t_i}{T}} \right)$$

Das Auswerten der Integralgleichung ist nicht so einfach wie unter Ziffer 6.1, da unter dem Integral $\dot{u}_e = \frac{du_e}{dt}$ und nicht

u_e steht. Nun ist aber nach Bild 12 $\frac{du_e}{dt}$ über die gesamte Impulslänge gleich null, und im Zeitpunkt $t = 0$ unendlich groß. Man arbeitet in diesem Fall mit einer Hilfsbetrachtung, d. h. man rechnet (Bild 12a) mit einem endlichen Anstieg von 0 bis u_e in der Zeit t_a und läßt dann t_a zu Null gehen.

Literatur

Schlegel-Nowak: Impulstechnik, Theorie und Anwendung. Fachbuchverlag Siegfried Schütz, Hannover.
Funktchnische Arbeitsblätter, Mth 11.

Eingescannt und bearbeitet für www.radiomuseum.org
mit freundlicher Genehmigung des Funkschau Verlags.
Die aktuellen Ausgaben der Funkschau finden Sie unter
www.funkschau.de