

# Reaktanzfilter, Tiefpaß- und Hochpaßfilter

# Fi 71

2 Blätter

## 1 Begriffsbestimmungen

### 1.1 Reaktanzfilter

Unter einem Reaktanzfilter versteht man einen Vierpol, in dem nur Kapazitäten und Induktivitäten Verwendung finden. Die unvermeidlichen, insbesondere in den Induktivitäten auftretenden Verluste werden also vernachlässigt. Ein Reaktanzfilter hat die Aufgabe, Signale eines vorgegebenen Frequenzbereiches durchzulassen, dagegen die Signale anderer Bereiche zu sperren.

### 1.2 Tiefpaß

Dieses Filter hat einen Durchlaßbereich für die tiefen Frequenzen und einen Sperrbereich für die Höhen.

### 1.3 Hochpaß

Hier existiert ein Sperrbereich für tiefe, ein Durchlaßbereich für hohe Frequenzen.

### 1.4 Bandpaß

Auf einen Sperrbereich für tiefe Frequenzen folgt ein Durchlaßbereich und anschließend erneut ein Sperrbereich.

### 1.5 Bandsperre

Ein Sperrbereich liegt nach den tiefen und hohen Frequenzen zu zwischen je einem Durchlaßbereich.

## 2 Filterglieder

Man unterscheidet:

### 2.1 $\pi$ -Glieder (Bild 1)

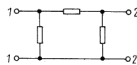


Bild 1. Das Filterglied in  $\pi$ -Form

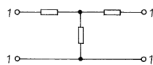


Bild 2. Das Filterglied in T-Form

### 2.2 T-Glieder (Bild 2)

Beide sind, von der Ein- und Ausgangsseite her betrachtet, symmetrisch aufgebaut. Abhängig vom Verwendungszweck, Tiefpaß oder Hochpaß, liegen,

die Induktivitäten im Längs-, die Kapazitäten im Querzweig oder die Kapazitäten im Längs-, die Induktivitäten im Querzweig.



Bild 3. Ein Halbglied oder L-Glied

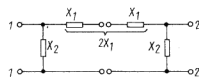


Bild 3a. Ein  $\pi$ -Glied läßt sich aus zwei Halbgliedern zusammensetzen

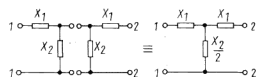


Bild 3b. Ein T-Glied, gebildet aus zwei Halbgliedern

Beide lassen sich aus je zwei Halbgliedern (L-Gliedern) zusammensetzen (Bild 3). Bezeichnet man die beiden Blindwiderstände des L-Gliedes mit  $jx_l$  und  $jx_q$ , dann entsteht durch Kombination zweier L-Glieder

ein  $\pi$ -Glied mit  $2 \cdot jx_l$  im Längszweig und  $1 \cdot jx_q$  in jedem Querzweig

ein T-Glied mit  $\frac{1}{2} \cdot jx_q$  im Querzweig und  $1 \cdot jx_l$  in jedem Längs-T-Arm



Bild 4. Ein Halbglied (nach Bild 3), jedoch wird der Längswiderstand mit  $X_1/2$  (statt  $X_1$ ) und der Querwiderstand mit  $2 \cdot X_2$  (statt  $X_2$ ) eingesetzt

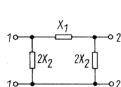


Bild 4a. Ein  $\pi$ -Glied, aufgebaut aus zwei Halbgliedern in der Darstellung von Bild 4

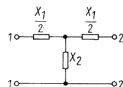


Bild 4b. Ein T-Glied, zusammengesetzt aus zwei Halbgliedern unter Verwendung der Bezeichnungen von Bild 4

Es sei darauf hingewiesen, daß in der Literatur oft anders verfahren wird. Man legt (Bild 4)

- bei dem  $\pi$ -Glied  $X_1$  in den Längszweig,  $2 \cdot X_2$  in jeden Querzweig,
- bei dem T-Glied  $X_2$  in den Querzweig und  $\frac{1}{2} X_1$  in jeden Längs-T-Arm,
- bei dem L-Glied  $\frac{1}{2} X_1$  in den Längszweig,  $2 \cdot X_2$  in den Querzweig.

Es ist natürlich nur eine Definitionsfrage, welches Verfahren man anwendet. Nur muß man diesen Unterschied beim Vergleich von Formeln verschiedener Autoren beachten.

Man unterscheidet ferner:

### 2.3 Anfangs- und End-Halbglieder (in L-Form)

Diese sind fast immer anders aufgebaut als die Hälften der erwähnten  $\pi$ - und T-Glieder (Bild 3).

### 2.4 Filterketten

Aus den verschiedenen  $\pi$ -, T- und Halbgliedern werden Filterketten (Bild 5) aufgebaut.

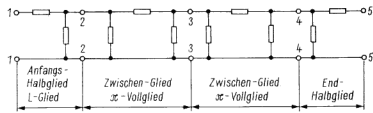


Bild 5. Beispiel einer Filterkette, bestehend aus Voll- und Halbgliedern

### 3 Eigenschaften der Grundglieder

#### 3.1 Das Grundglied

Unter einem Grundglied versteht man ein Filterglied, bei dem der Blindwiderstand im Längsweig dieselbe Frequenzabhängigkeit wie der Reziprokwert des Blindwiderstandes – also der Blindleitwert – im Querweig zeigt. Es sind dann  $jx_l$  und  $jx_q$  dual, Reaktanz-reziprok oder Blindwiderstands-reziprok zueinander.

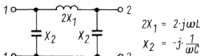


Bild 6. Beispiel eines Grundgliedes. Die beiden Blindwiderstände im Längs- und Querweig sind reaktanzreziprok zueinander

#### Beispiel

Tiefpaß nach Bild 6:

Im Längsweig: Induktivität: Blindwiderstand  $j\omega L$

im Querweig:

Kapazität: Blindwiderstand  $\frac{1}{j\omega C}$ , Blindleitwert  $j\omega C$ ;

also in beiden Fällen lineare Abhängigkeit von  $\omega$  bzw.  $f$ .

#### 3.2 Das L-Grundglied, Wellenwiderstand

Der Wellenwiderstand bestimmt sich nach:

$$Z = \sqrt{Z_{\text{leer}} \cdot Z_k}$$

$Z_{\text{leer}}$ : Die Ausgangsseite des Filters ist offen (Leerlauf)  
 $Z_k$ : Die Ausgangsseite des Filters ist kurzgeschlossen

} in den Eingang des Filters hineingemessen

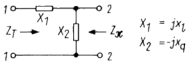


Bild 7. Die beiden Wellenwiderstände des L-Grundgliedes:  $Z_T$  auf der T-Seite,  $Z_\pi$  auf der  $\pi$ -Seite

Da das L-Glied unsymmetrisch ist, ergeben sich zwei Wellenwiderstandswerte (Bild 7):

T-Seite:  $Z_{\text{leer}} = jx_l - jx_q$        $Z_T = \sqrt{x_q \cdot x_l - x_l^2}$       (1)

$Z_k = jx_l$

$\pi$ -Seite:  $Z_{\text{leer}} = -jx_q$        $Z_\pi = \frac{x_q \cdot x_l}{\sqrt{x_q \cdot x_l - x_l^2}}$       (2)

$Z_k = \frac{jx_l \cdot (-jx_q)}{jx_l - jx_q}$

#### 3.3 Tiefpaß-Grundglieder

Sie sind nach Bild 8 aus der Zusammenschaltung zweier L-Grundglieder gebildet. Man sieht, daß das  $L_1$ -Glied an seinem Ausgang (Klemmen 2,2') mit dem Wellenwiderstand des  $L_2$ -Gliedes (Klemmen 3,3') =  $Z_{\pi 2}$  abgeschlossen ist. Es

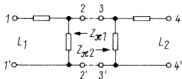
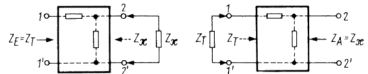


Bild 8. Zusammenschaltung zweier L-Grundglieder zu einem Tiefpaß-Grundglied. An der Nahtstelle ist jeweils der innere gleich dem äußeren Widerstand

besteht Gleichheit des inneren ( $Z_{\pi 1}$ ) und des äußeren ( $Z_{\pi 2}$ ) Widerstandes. Es liegt also Anpassung vor. Das gleiche gilt natürlich auch für die Kombination zweier L-Grundglieder zu einem  $\pi$ -Grundglied.

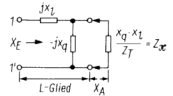
#### 3.3.1 Wellenwiderstand

In diesem Fall, also bei Anpassung, ist der an den Klemmen 1,1' gemessene Eingangswiderstand gleich dem Wellenwiderstand und zwar unter Berücksichtigung des nach Bild 8 gegebenen Falles gleich  $Z_T$  (Bild 9).



Oben: Bild 9. Darstellung der Anpassung im Bild links auf der Ausgangsseite, im Bild rechts auf der Eingangsseite

Rechts: Bild 10. Berechnung des Eingangswiderstandes eines L-Gliedes für den Anpassungsfall



Kontrolle (Bild 10):

Das L-Glied hat nach Gleichung 2 auf der  $\pi$ -Seite den Wellenwiderstand:

$$Z_\pi = \frac{x_q \cdot x_l}{\sqrt{x_q \cdot x_l - x_l^2}}$$

Der Außenwiderstand des L-Gliedes wird also mit

$$\frac{x_q \cdot x_l}{\sqrt{x_q \cdot x_l - x_l^2}} = \frac{x_q \cdot x_l}{Z_T} \quad \text{bemessen.}$$

Dann ist der Eingangswiderstand  $X_E$  des so belasteten L-Gliedes gegeben durch:

$$X_E = jx_l + \frac{-jx_q \cdot x_q \cdot x_l}{Z_T} = jx_l + \frac{x_q \cdot x_l}{Z_T + jx_l}$$

$$X_E = \frac{jx_l \cdot Z_T - x_l^2 + x_l \cdot x_q}{Z_T + jx_l}$$

$$X_E = Z_T \cdot \frac{jx_l + \frac{x_l \cdot x_q - x_l^2}{Z_T}}{jx_l + Z_T} = Z_T \cdot \frac{jx_l + \frac{Z_T^2}{Z_T}}{jx_l + Z_T} = Z_T$$

Das mit dem Wellenwiderstand  $Z_\pi$  belastete L-Glied hat also einen Eingangswiderstand  $X_E$ , der gleich dem Wellenwiderstand  $Z_T$  ist.

#### 3.3.2 Wellenwiderstand des T-Grundgliedes (Bild 11)

$$Z_T = \sqrt{x_q \cdot x_l - x_l^2} = \sqrt{\frac{\omega L}{\omega C} - \omega^2 L^2} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \omega^2 LC}$$

$$Z_T = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_g^2}} \quad (3)$$

$$\omega_g = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \text{Grenz-Kreisfrequenz}$$

Aus der Gleichung für  $Z_T$  kann man den Faktor  $\sqrt{LC}$  als frequenzunabhängig abspalten. Es sei mit Nennwert des Wellenwiderstandes oder Nennwiderstand und mit dem Buchstaben R bezeichnet.

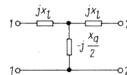


Bild 11. Das T-Grundglied

3.3.3 Wellenwiderstand des  $\pi$ -Grundgliedes (Bild 12)

$$Z_n = \frac{x_q \cdot x_1}{\sqrt{x_q \cdot x_1 - x_1^2}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_G}\right)^2}} \quad (4)$$

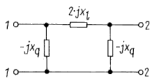


Bild 12. Das  $\pi$ -Grundglied

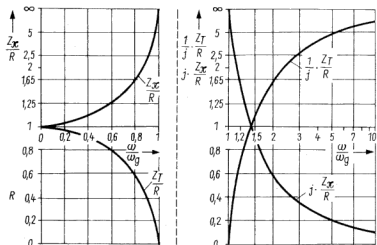


Bild 13. Darstellung des normierten Wellenwiderstandes für ein Tiefpaß-Grundglied, und zwar  $\frac{Z_n}{\sqrt{L/C}}$  bzw.  $\frac{Z_T}{\sqrt{L/C}}$  aufgetragen über  $\frac{\omega}{\omega_G}$

Bild 13 zeigt die Abhängigkeit des normierten Wellenwiderstandes, d. h.  $\frac{Z_T}{\sqrt{L/C}}$  und  $\frac{Z_n}{\sqrt{L/C}}$ , aufgetragen über  $\frac{\omega}{\omega_G}$ . Diese Kurven gelten natürlich auch für das L-Grundglied.

3.3.4 Dämpfungs- und Phasenmaß

Für das Übertragungsmaß gilt: (Ableitung siehe Anhang)

$$\underline{g} = \ar \tan h \sqrt{\frac{Z_k}{Z_{leer}}} = \ar \cos h \sqrt{\frac{Z_{leer}}{Z_{leer} - Z_k}} \quad (5)$$

$$\underline{g} = \ar \sin h \sqrt{\frac{Z_k}{Z_{leer} - Z_k}}$$

$$\underline{g} = a + jb \quad \begin{matrix} a = \text{Dämpfungsmaß} \\ b = \text{Phasenmaß} \end{matrix}$$

$\underline{g}$  berechnet sich – mit den Bezeichnungen von Bild 14 – für das T- und  $\pi$ -Glied wie folgt:

T-Glied:

$$Z_{leer} = X_1 + X_2$$

$$Z_k = X_1 + \frac{X_1 \cdot X_2}{X_1 + X_2}$$

$$\cos h \underline{g} = \sqrt{\frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 - X_1 - \frac{X_1 \cdot X_2}{X_1 + X_2}}}$$

$$\cos h \underline{g} = \sqrt{\frac{(X_1 + X_2)^2}{X_2^2}} = \frac{X_1}{X_2} + 1 \quad (6)$$

Mit den Bezeichnungen nach Bild 11:

$$\cos h \underline{g} = \frac{x_1}{-x_q} + 1 = 1 - \frac{2 x_1}{x_q} \quad (6a)$$

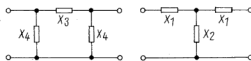


Bild 14. Bezeichnung der Reaktanzen im T- und  $\pi$ -Glied für die Berechnung von Dämpfungs- und Phasenmaß

Weiter ergibt sich aus  $\cos h^2 x - \sin h^2 x = 1$

$$\sin h \underline{g} = \sqrt{\frac{(X_1 + X_2)^2}{X_2^2} - 1} = \sqrt{\frac{X_1}{X_2} \left( 2 + \frac{X_1}{X_2} \right)} \quad (7)$$

und nach Bild 11

$$\sin h \underline{g} = \sqrt{\frac{4 x_1}{x_q} \left( 1 - \frac{x_1}{x_q} \right)} \quad (7a)$$

$\pi$ -Glied:

$$Z_{leer} = \frac{X_4 \cdot (X_3 + X_4)}{X_4 + X_3 + X_4}$$

$$Z_k = \frac{X_4 \cdot X_3}{X_4 + X_3}$$

$$\cos h \underline{g} = \sqrt{\frac{X_4 \cdot X_3 + X_4^2}{2 X_4 + X_3} \cdot \frac{X_4 \cdot X_3}{2 X_4 + X_3} \cdot \frac{X_4 \cdot X_3}{X_4 + X_3}}$$

$$\cos h \underline{g} = \sqrt{\frac{(X_3 + X_4)^2}{X_4^2}} = \frac{X_3}{X_4} + 1$$

Das bedeutet, das Übertragungsmaß hat im T- und  $\pi$ -Glied den gleichen Wert. Aus der Gleichung 6 berechnen sich Phasenmaß und Dämpfungsmaß wie folgt:

Zunächst gilt (nach FIA Mth 21)

$$\cos h (a + jb) = \cos h a \cdot \cos b + j \sin h a \cdot \sin b \quad (6b)$$

$$\sin h (a + jb) = \sin h a \cdot \cos b + j \cos h a \cdot \sin b \quad (7b)$$

Durchlaßbereich:

$$\text{Er ist begrenzt durch die Werte } \frac{\omega}{\omega_G} = 0 \text{ und } \frac{\omega}{\omega_G} = 1$$

Gleichzeitig läuft  $\frac{x_1}{x_q}$ , wegen  $\frac{\omega^2}{\omega_G^2} = \frac{x_1}{x_q}$ , ebenfalls zwischen 0 und 1.

Im Durchlaßbereich sind Gl. 6, 6a reell, folglich ist nach Gl. 6b

$$\sin h a \cdot \sin b = 0 \quad (8)$$

Ferner ist Gl. 7a imaginär, demzufolge ist nach Gl. 7b

$$\sin h a \cdot \cos b = 0 \quad (8a)$$

Gl. 8, 8a sind nur erfüllbar, wenn  $a = 0$  ist.

Das Dämpfungsmaß  $a$  ist 0.

Aus Gl. 6 und 6b folgt, mit  $a = 0$  und  $\sin h a \cdot \sin b = 0$ ,

$$\text{Phasenmaß: } \cos b = 1 + \frac{X_1}{X_2} \text{ oder } 1 - \frac{2 x_1}{x_q}$$

Sperrbereich:

$$\frac{\omega}{\omega_g} > 1, \text{ entsprechend } \frac{x_1}{x_q} > 1$$

Im Sperrbereich sind Gl. 6, 6a reell, folglich ist nach Gl. 6b

$$\sin h a \cdot \sin b = 0 \tag{9}$$

Ferner ist Gl. 7a reell, und es ist nach Gl. 7b

$$\cos h a \cdot \sin b = 0 \tag{9a}$$

Gl. 9, 9a sind erfüllbar mit  $\sin b = 0$ .

Das Phasenmaß  $b = 0$  oder  $= \pm k \cdot \pi$

Aus den Gleichungen 6b und 7b folgt mit  $b = \pm k \cdot \pi$  für das Dämpfungsmaß

*Handwritten:*  $\cos h a = 1 + \frac{x_1}{x_2} = 1 - \frac{2x_1}{x_q} \alpha = 2 \frac{u_1}{u_2}$ ;  $v_2 = \pi \omega$

$$\sin h a = \sqrt{\frac{x_1}{x_2} \left( 2 + \frac{x_1}{x_2} \right)} = \sqrt{-\frac{4x_1}{x_q} \left( 1 - \frac{x_1}{x_q} \right)}$$

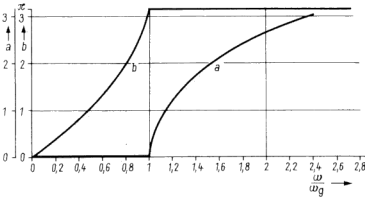


Bild 15. Verlauf des Dämpfungs- und Phasenmaßes für ein Tiefpaß-Grundglied, aufgetragen über der normierten Frequenz  $\left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)$

Bild 15 zeigt den Verlauf des Dämpfungs- und Phasenmaßes über  $\frac{\omega}{\omega_g}$

3.4 Die Hochpaß-Grundglieder

Auch sie sind nach Bild 16 aus der Zusammenschaltung zweier L-Grundglieder gebildet.

3.4.1 Wellenwiderstand des T-Grundgliedes (Bild 17)

Setzt man in Gleichung 3  $x_q = \omega L$  und  $x_1 = \frac{1}{\omega C}$ , ergibt sich:

$$Z_T = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega_g^2}{\omega^2}} = R \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega_g^2}{\omega^2}}$$

3.4.2 Wellenwiderstand des pi-Grundgliedes (Bild 17)

Nach Gleichung 4 gilt mit:  $x_q = \omega L$  und  $2 \cdot x_1 = \frac{1}{\omega C}$ ;

$$x_1 = \frac{1}{\omega C}$$

$$Z_\pi = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_g^2}{\omega^2}}} = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{\omega_g^2}{\omega^2}}}$$

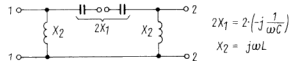


Bild 16. Zusammenschaltung zweier L-Grundglieder zu einem Hochpaß-Grundglied

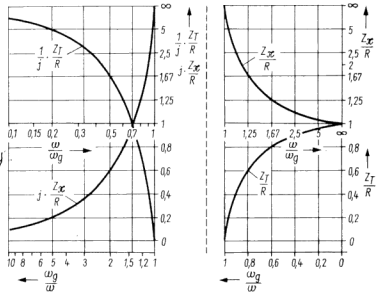


Bild 17. Darstellung des normierten Wellenwiderstandes für ein Hochpaß-Grundglied (vgl. Bild 13)

3.4.3 Dämpfungs- und Phasenmaß

T-Glied, pi-Glied

Mit den Gleichungen 6 und 6a erhält man:

$$\cos h g = 1 - \frac{2 x_1}{x_q}$$

$$\sin h g = \sqrt{-\frac{4 x_1}{x_q} \left( 1 - \frac{x_1}{x_q} \right)}$$

Demnach ist (Bild 18)

Durchlaßbereich:

Das Dämpfungsmaß  $\alpha = 0$

Das Phasenmaß  $\cos b = 1 - \frac{2 x_1}{x_q} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{\omega C \cdot \omega L}$

$$\cos b = 1 - 2 \cdot \frac{\omega_g^2}{\omega^2}$$

Sperrbereich:

Das Phasenmaß  $b = 0$  oder  $= \pm k \cdot \pi$

Das Dämpfungsmaß  $\cos h a = 1 - \frac{2 x_1}{x_q}$

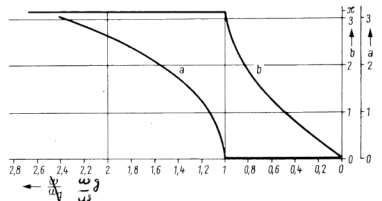


Bild 18. Verlauf des Dämpfungs- und Phasenmaßes für ein Hochpaß-Grundglied (vgl. Bild 15)