

# Funktechnische Arbeitsblätter

# Mv 01

## Phasenmessung mit Lissajous-Figuren

2 Blätter

### A. Prinzip

Gibt man auf die beiden Plattenpaare einer Oszillografenröhre zwei sinusförmige Spannungen gleicher Frequenz, aber verschiedener Phasenlage, so schreibt der durch beide Spannungen abgelenkte Elektronenstrahl eine Ellipse. Je nach der Phasendifferenz ist das Verhältnis der kurzen zur langen Ellipsenachse, die Öffnung, verschieden groß. In dem einen Grenzfall kann ein Kreis (beide Achsen gleich groß), im anderen ein Strich (eine Achse gleich Null) geschrieben werden. Aus der Form der Ellipse kann also auf die Phasendifferenz geschlossen werden. Voraussetzung für die übliche Messung ist, daß die Auslenkung in x-Richtung genauso groß wie in y-Richtung ist. Beim Einstellen der Spannungen müssen also die unterschiedlichen Ablenkempfindlichkeiten der beiden Plattenpaare berücksichtigt werden.

### B. Die Entstehung bzw. Konstruktion der Ellipse

Man zeichnet nach **Bild 1** für die Ablenkung in x-Richtung über der y-Achse eine Sinuskurve ( $u_x$ ). Entsprechend wird in der Verlängerung der x-Achse eine Sinuskurve gleicher Amplitude ( $u_y$ ) dargestellt. Die  $u_y$ -Kurve muß aber gegen die  $u_x$ -Kurve um den gegebenen Phasenwinkel ( $45^\circ$  in Bild 1) verschoben sein. D. h. für die  $u_x$ -Kurve liegt der Zeitpunkt  $t=0$  im Schnittpunkt dieser Kurve mit der y-Achse (und zwar auf dem aufsteigenden Ast). Bei der  $u_y$ -Kurve dagegen befindet sich  $t=0$  zwar auch auf dem ansteigenden Ast, aber noch vor Erreichen der Nulllinie. Die dann zu gleichen Zeitpunkten gehörenden Amplituden werden zusammengesetzt und so ergibt sich die gezeichnete Ellipse.

**Bild 2** zeigt für einige ausgezeichnete Phasen-Verschiebungen ( $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$  und  $180^\circ$ ) die sich ergebenden Ellipsenformen. Wichtig ist, daß für  $\varphi = 0^\circ$  eine Gerade geschrieben wird. Bei gleichen Amplituden, wie vorausgesetzt, ist sie unter  $45^\circ$  gegen das Achsenkreuz geneigt. Bei einer Phasenverschiebung von  $90^\circ$  entsteht ein Kreis.

$\varphi=0^\circ$

$\varphi=30^\circ$

$\varphi=45^\circ$

$\varphi=60^\circ$

$\varphi=90^\circ$

$\varphi=120^\circ$

$\varphi=135^\circ$

$\varphi=150^\circ$

$\varphi=180^\circ$

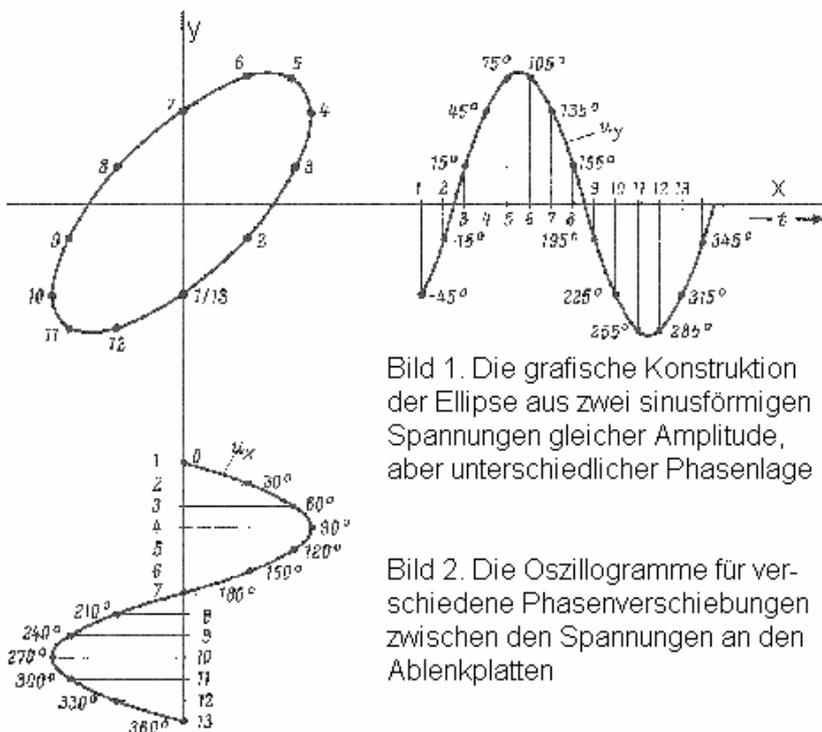
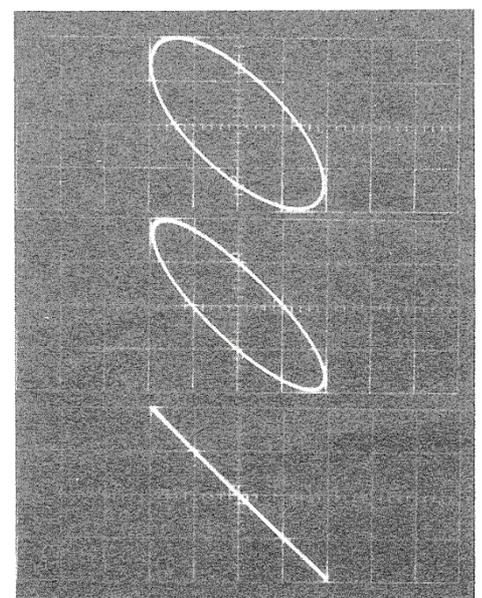
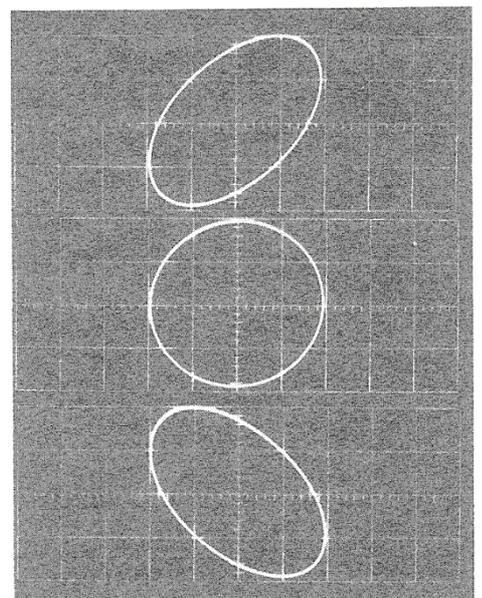
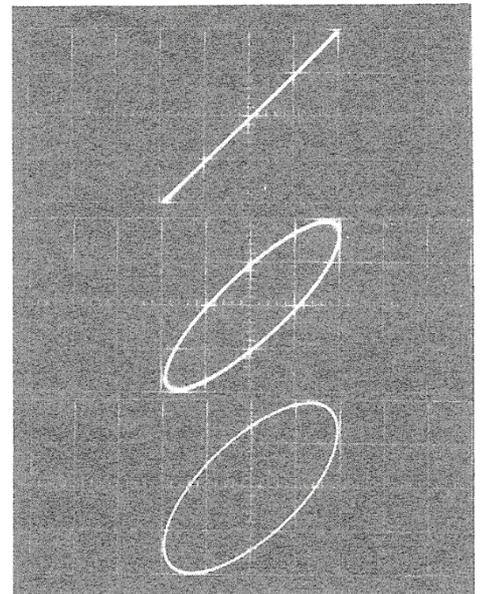


Bild 1. Die grafische Konstruktion der Ellipse aus zwei sinusförmigen Spannungen gleicher Amplitude, aber unterschiedlicher Phasenlage

Bild 2. Die Oszillogramme für verschiedene Phasenverschiebungen zwischen den Spannungen an den Ablenkplatten

# Mv 01

## C. Die Bestimmung der Phasenverschiebung aus der

### Form der Ellipse

Vorausgesetzt wird, daß die beiden zu vergleichenden Spannungen gleiche Frequenzen haben und so bemessen sind, daß sie auf dem Bildschirm die gleiche Auslenkung erzeugen. Die in den meisten Fällen unterschiedliche Ablenkempfindlichkeit der beiden Plattenpaare der Oszillografenröhre ist bei einem solchen Abgleich automatisch berücksichtigt. Bei dem Abgleich auf gleiche Auslenkung geht man so vor, daß man zunächst für die x-Achse für gegebene Spannung die Auslenkung einstellt. Dabei wird den y-Platten keine Spannung zugeführt. Anschließend wird die Spannung für die y-Auslenkung so eingestellt, daß sich die gleiche Auslenkung wie in x-Richtung ergibt.

In diesem Fall gilt für den zeitlichen Verlauf der Aus-

lenkung von Spannung 1:  $x = a \cdot \cos \omega t$

und für den der Spannung 2:  $y = a \cdot \cos (\omega t + \varphi)$

Der gleiche Faktor a bedeutet, daß für beide Spannungen die gleiche Auslenkung eingestellt ist. In beiden Gleichungen ist die Frequenz durch  $\omega$  berücksichtigt, das bedeutet die schon erwähnte Frequenzgleichheit.

Um zur Kurve zu gelangen, auf der der Elektronenstrahl läuft, muß die Abhängigkeit von der Zeit verschwinden. Man geht wie folgt vor: Nach Funktechnische Arbeitsblätter Mth 21/1 wird  $y = a \cdot \cos (\omega t + \varphi)$  umgeformt in:  $y = a[\cos \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi]$

Unter Benutzung der Gleichung für x ergibt sich: (1)

$$y = a \left[ \frac{x}{a} \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right]$$

$$y = a \left[ \frac{x}{a} \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right]$$

Durch Quadrieren ergibt sich

$$\begin{aligned} y^2 - 2xy \cos \varphi + x^2 \cos^2 \varphi &= a^2 \sin^2 \varphi - x^2 \sin^2 \varphi \\ y^2 - 2xy \cos \varphi + x^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) &= a^2 \sin^2 \varphi \\ y^2 - 2xy \cos \varphi + x^2 &= a^2 \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

Gleichung 2 zeigt nun, daß es sich um einen Kegelschnitt, und zwar um eine Ellipse handelt, da die Kurve in jedem Fall durch ein Quadrat mit der Kantenlänge 2a begrenzt wird (Bild 3), denn sowohl x als auch y kann sich nur in dem Intervall  $\pm a$  bewegen. Man erkennt das sofort, wenn man in Gleichung 2 einmal x und dann y = 0 setzt.

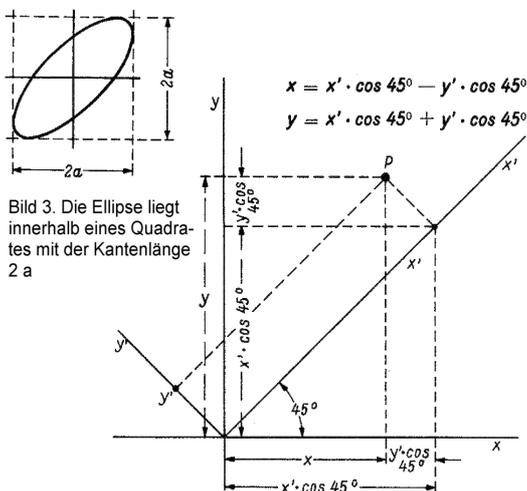


Bild 3. Die Ellipse liegt innerhalb eines Quadrates mit der Kantenlänge 2a

Bild 4. Betrachtung der Ellipse in einem um 45° gedrehten Koordinatensystem

Für  $x = 0$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} y^2 &= a^2 \cdot \sin^2 \varphi \\ y &= a \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

Da  $\sin \varphi$  nur den Maximalwert +1 oder -1 annehmen kann, wird

$$y = \pm a$$

Das gleiche ergibt sich für  $y = 0$ . Die Gleichung 2 zeigt ferner noch:

- a) Für eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$  und  $270^\circ$   
( $\cos \varphi = 0, \sin \varphi = +1$  oder  $-1$ )

ergibt sich als Kurve ein Kreis, denn  $x^2 + y^2 = a^2$ .

- b) Für  $\varphi = 0^\circ$  und  $180^\circ$ , d. h.  $\sin \varphi = 0, \cos \varphi = \pm 1$   
Erhält man:  $y^2 \pm 2xy + x^2 = 0$

Das bedeutet:

$$\begin{aligned} \text{Für } \varphi = 0^\circ; \quad y^2 - 2xy + x^2 &= 0 \\ (x-y)^2 &= 0 \\ x &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{für } \varphi = 180^\circ; \quad y^2 + 2xy + x^2 &= 0 \\ (x+y)^2 &= 0 \\ x &= -y \end{aligned}$$

In beiden Fällen enthalten wir Geraden, die eine ist nur gegen die andere um  $90^\circ$  gedreht.

Aus der Lage und der Form der Ellipse bestimmt sich nun der Phasenwinkel nach den in der Tafel angegebenen Formeln.

Die Gleichung 3 ist leicht zu begründen:

Die Gesamt-Auslenkung in y-Richtung ist 2a.

Die Auslenkung in y-Richtung für einen gegebenen Phasenwinkel ist nach Gleichung 2 (für  $x = 0$ )

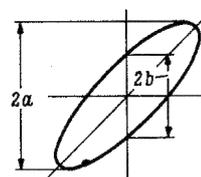
$$y^2 = a^2 \sin^2 \varphi$$

$$y = a \cdot \sin \varphi$$

oder 2y (d. h. von der Nullachse nach beiden Seiten gemessen) =  $2b = 2a \cdot \sin \varphi$ .

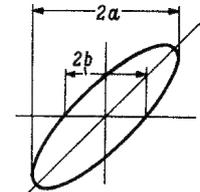
Die Gleichung 5 kann man dadurch erhalten, daß man das Koordinaten-System um  $45^\circ$  verdreht (Bild 4). Es fallen dann die neuen Achsen ( $x'$  und  $y'$ ) mit den Achsen der Ellipse zusammen; denn die Symmetrielinien dieser Ellipse sind um  $45^\circ$  gegen das normale Achsenkreuz ( $x$  und  $y$ ) versetzt.

### Formeltafel zur Berechnung des Phasenwinkels



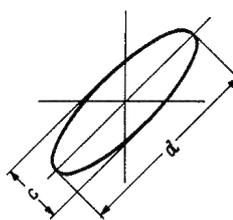
$$\sin \varphi = \frac{b}{a} \quad (3)$$

$$\varphi = \arcsin \frac{b}{a}$$

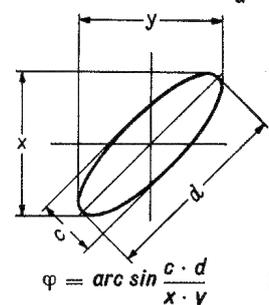


$$\sin \varphi = \frac{b}{a} \quad (4)$$

$$\varphi = \arcsin \frac{b}{a}$$



$$\varphi = 2 \arcsin \frac{c}{d} \quad (5)$$



$$\varphi = \arcsin \frac{c \cdot d}{x \cdot y} \quad (6)$$

Die Drehung des Koordinatensystems um  $45^\circ$

$$x^2 - 2xy \cdot \cos \varphi + y^2 = a^2 \sin^2 \varphi$$

war die Gleichung (2) der Ellipse. Aus Bild 4 geht hervor: Die Koordinaten des Punktes P sind x, y. Drückt man diese Koordinaten durch die neuen, um  $45^\circ$  gedrehten Koordinaten  $x'$ ,  $y'$  aus, so erhält man:

$$x = x' \cdot \cos 45^\circ - y' \cdot \cos 45^\circ = x' \cdot 1/2 \cdot \sqrt{2} - y' \cdot 1/2 \cdot \sqrt{2}$$

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = x' \cdot \cos 45^\circ + y' \cdot \cos 45^\circ = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

Setzt man dies in Gleichung 2 ein, so erhält man

$$\frac{x'^2}{2} - x' \cdot y' + \frac{y'^2}{2} - 2 \left( \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} \right) \cdot \cos \varphi +$$

$$\frac{x'^2}{2} + x' \cdot y' + \frac{y'^2}{2} = a^2 \sin^2 \varphi$$

$$x'^2 + y'^2 - 2 \left( \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} \right) \cdot \cos \varphi = a^2 \sin^2 \varphi$$

$$x'^2 + y'^2 - x'^2 \cos \varphi + y'^2 \cos \varphi = a^2 \sin^2 \varphi$$

$$x'^2 (1 - \cos \varphi) + y'^2 (1 + \cos \varphi) = a^2 \sin^2 \varphi$$

$$x'^2 \cdot 2 \sin^2 \varphi / 2 + y'^2 \cdot 2 \cos^2 \varphi / 2 = a^2 \sin^2 \varphi$$

$$= a^2 \cdot 4 \sin^2 \varphi / 2 \cdot \cos^2 \varphi / 2$$

$$\frac{x'^2}{2a^2 \cos^2 \varphi / 2} + \frac{y'^2}{2a^2 \sin^2 \varphi / 2} = 1$$

Demnach besitzt die Ellipse im  $x'$ ,  $y'$ - Koordinatensystem die Hauptachsen: (Bild 5)

$$a \cdot \sqrt{2} \cos \varphi / 2 \text{ und } a \cdot \sqrt{2} \sin \varphi / 2$$

Somit ergibt sich (nach der Tafel und Bild 5):

$$\frac{c}{d} = \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \varphi / 2}{a \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \varphi / 2}$$

$$c/d = \tan \varphi / 2$$

$$\varphi = 2 \arctan c/d$$

**D. Mehrdeutigkeit der aufgenommenen Ellipsen**

1. Durch eine gegebene Ellipse ist nicht eindeutig ein einziger Phasenwinkel bestimmt; denn z. B. ergeben sich für  $150^\circ$  und  $210^\circ$  sowie für  $120^\circ$  und  $240^\circ$  usw. gleiche Figuren. Allgemein gilt, daß für Phasenwinkel von  $180^\circ \pm x$  das gleiche Oszillogramm entsteht.

Man kann aber durch spezielle Verfahren die Kurven kennzeichnen und unterscheidbar machen. Ein solches Verfahren ist in Bild 6 und Bild 7 beschrieben.

Dem Wehneltzylinder wird eine gegen die Bezugsspannung phasenverschobene Wechselspannung zugeführt. Dadurch wird die Helligkeit moduliert. Ein Teil des Oszillogramms wird hell, der andere dunkler geschrieben. Je nachdem, ob der helle Kurvenzug in der einen oder anderen Oszillogrammhälfte liegt, ist der Phasenwinkel größer oder kleiner als  $180^\circ$  (d. h.  $180^\circ + x$  oder  $180^\circ - x$ ) anzusetzen. Bild 7 will zeigen, wie eine derartige Unterscheidung möglich ist.

u, sei die Bezugsspannung, sie werde in ihrer Phasenlage als fest angenommen. Diese Spannung wird über ein phasendrehendes Glied (Bild 6) dem Wehneltzylinder zugeführt. Die zwischen Wehneltzylinder und Katode der Oszillografenröhre stehende Spannung ist mit  $u_w$  bezeichnet. Ihren Verlauf bzw. ihre Phasenverschiebung gegen  $u_x$  zeigt Bild 7. Die verschiedene Strichstärke der  $u_w$ -Kurve soll die unterschiedliche Helligkeit andeuten. In der positiven Hälfte der  $u_w$ -Kurve wird ein höherer Strahlstrom als in der negativen Hälfte erzeugt.

Die  $u_{y(a)}$ -Kurve ist nun um  $45^\circ$  gegen  $u_x$  verschoben angenommen. Man sieht, daß die untere Hälfte der Ellipse heller als die obere geschrieben wird.

Betrachtet man nun statt der Phasenverschiebung

$\varphi_1 = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$  (Bild 7a),

die Phasenverschiebung  $\varphi_2 = 180^\circ + 135^\circ = 315^\circ$ ,

so ergibt sich das Bild 7b. In diesem Fall nun ist die obere Hälfte der Ellipse heller als die untere.

Man sieht also, daß auf diese Weise eine Deutung, ob ein  $\varphi = 180^\circ + x$  oder  $180^\circ - x$  vorliegt, möglich ist.

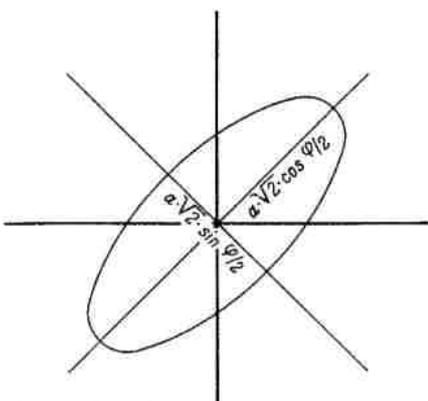


Bild 5. Die Hauptachsen der Ellipse im gedrehten Koordinatensystem

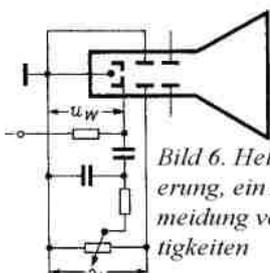


Bild 6. Helligkeitssteuerung, ein Mittel zur Vermeidung von Mehrdeutigkeiten

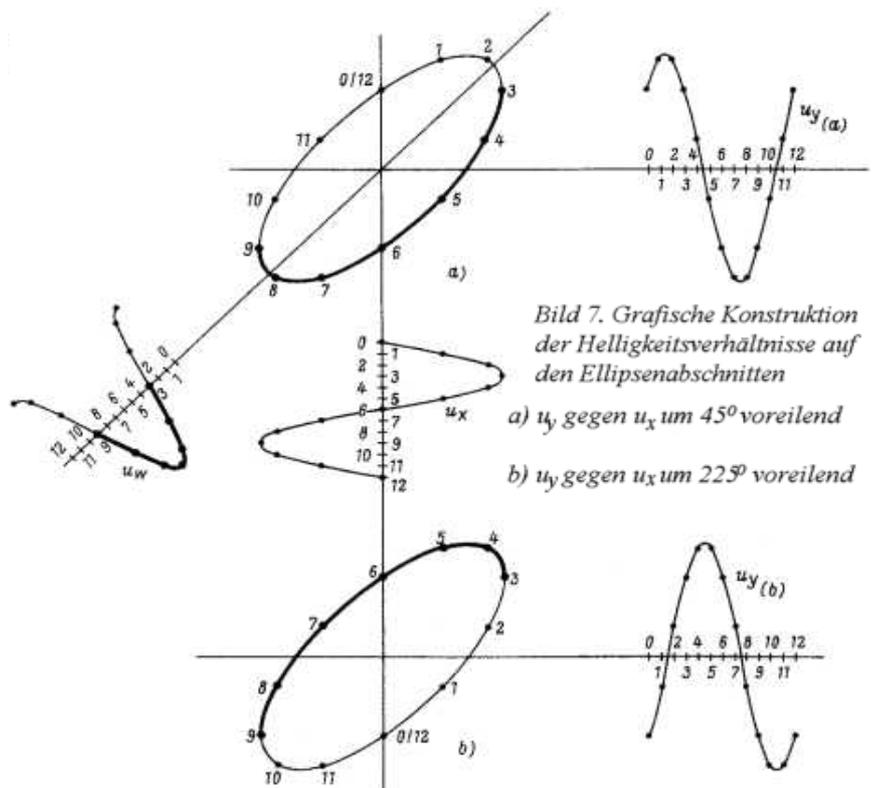


Bild 7. Grafische Konstruktion der Helligkeitsverhältnisse auf den Ellipsenabschnitten

- a)  $u_y$  gegen  $u_x$  um  $45^\circ$  voreilend
- b)  $u_y$  gegen  $u_x$  um  $22,5^\circ$  voreilend

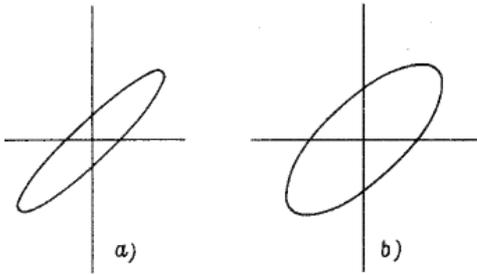


Bild 8. Mit zwei Oszillogrammen, von denen eins durch zusätzliche Phasenverschiebung gewonnen ist, lässt sich entscheiden, ob  $u_x + \varphi = u_y$  oder  $u_x - \varphi = u_y$  ist

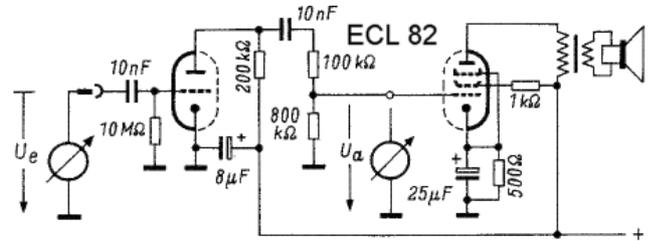


Bild 9. Schaltbild eines auf Phasengang zu messenden Nf-Verstärkers

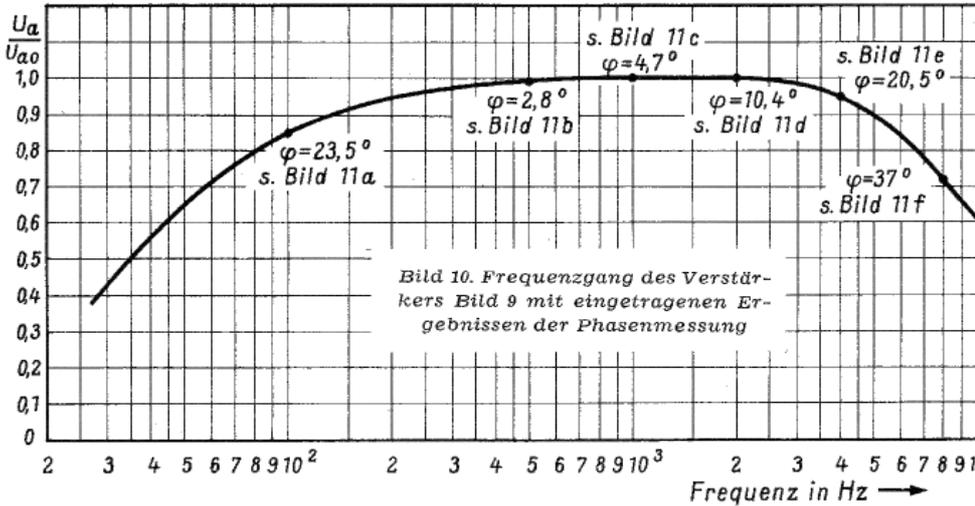
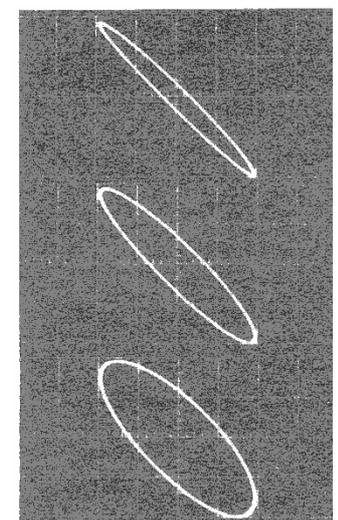
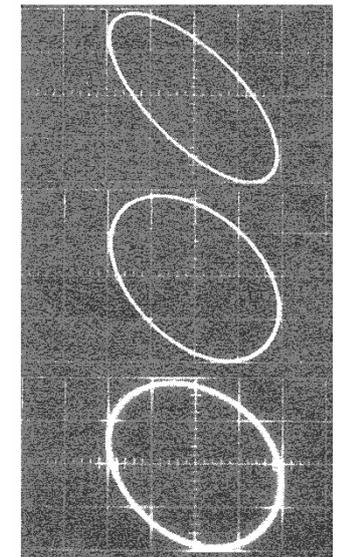
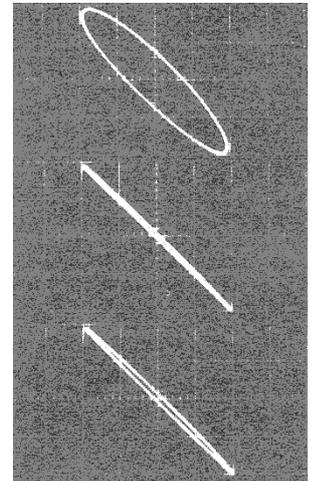


Bild 10. Frequenzgang des Verstärkers Bild 9 mit eingetragenen Ergebnissen der Phasemessung



2. Ebenso sagt das Oszillogramm zunächst nichts darüber aus, ob  $u_y$  gegen  $u_x$  vor- oder nachhilt, d. h. ob  $u_x + \varphi = u_y$  oder  $u_x - \varphi = u_y$  ist. Um dies zu entscheiden, dient folgendes Hilfsmittel. Man schaltet in den Eingang der  $u_x$ -Spannung, d. h. der Bezugsspannung, ein phasendrehendes Glied und beobachtet, wie sich dabei die Figur am Oszillografenschirm verändert.

Schaltet man z. B. ein phasendrehendes Glied so in den Eingang an den  $u_x$ -Klemmen, daß sich eine Voreilung  $\Delta\varphi$  ergibt und beobachtet man gleichzeitig, daß sich die Figur von Bild 8a in Richtung auf die Kreisform (Bild 8b) verändert, daß also  $\varphi$  von  $\varphi_1$  auf  $\varphi_2$  anwächst, so bedeutet das:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &> \varphi_1 \\ u_x - u_y &= \varphi_1 \\ u_x + \Delta\varphi - u_y &= \varphi_2 \end{aligned}$$

**E. Anwendungsbeispiel**

In Bild 9 ist eine Niederfrequenzverstärkerschaltung gezeichnet, von der der Frequenzgang und der Phasengang des Vorverstärkerteils (C-System der ECL 82) interessiert. Den in üblicher Weise gemessenen Frequenzgang zeigt das Bild 10. Die Messung des Phasenganges des Verstärkers erfolgte in der in den vorstehenden Abschnitten beschriebenen Weise, indem die Eingangsspannung und die Ausgangsspannung auf je ein Plattenpaar eines Oszillografen gegeben wurde. Die Messung ergab folgende Phasenverschiebungen der Ausgangsspannung gegen die Eingangsspannung:

Frequenz	Phasenwinkel $\varphi$	Dargestellt im Bild
100 Hz	23,5 <sup>c</sup>	11a
500 Hz	2,8 <sup>c</sup>	11b
1000 Hz	4,7 <sup>c</sup>	11c
2000 Hz	10,4 <sup>c</sup>	11d
4000 Hz	20,5 <sup>c</sup>	11e
8000 Hz	37 <sup>c</sup>	11f
10 kHz	43 <sup>c</sup>	11g
20 kHz	64 <sup>c</sup>	11h
30 kHz	72 <sup>c</sup>	11i

Die Meßpunkte für die Phasenmessung sind bis 8 kHz in Bild 10 mit eingetragen. Bild 11 zeigt Oszillogramme dieser Messungen bis zur Frequenz  $f = 30$  kHz.