Aus FUNKSCHAU 20/1952 . Digitalisiert 03/2018 von Eike Grund für http://www.radiomuseum.org
mit freundlicher Genehmigung der FUNKSCHAU-Redaktion. Die aktuellen Ausgaben der FUNKSCHAU
finden Sie unter http://www.funkschau.de

Funktechnische Arbeitsblätter

DK 512.1

Mth 11

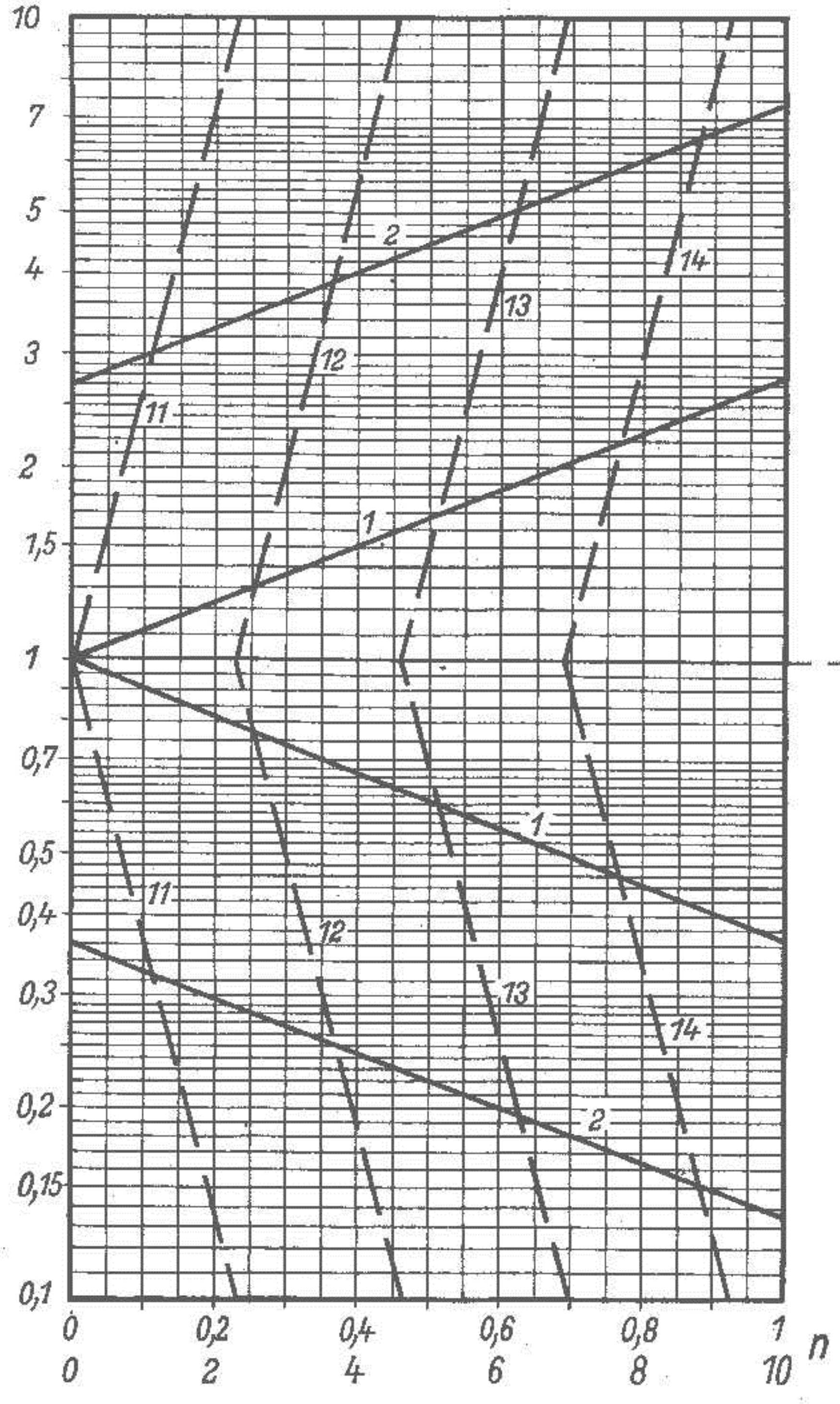
2. Ausgabe

2 Blätter

Die e-Funktion in der Nachrichtentechnik

A. Verlauf der Kurven

1. Dargestellt im linear-logarithmischen Maßstab

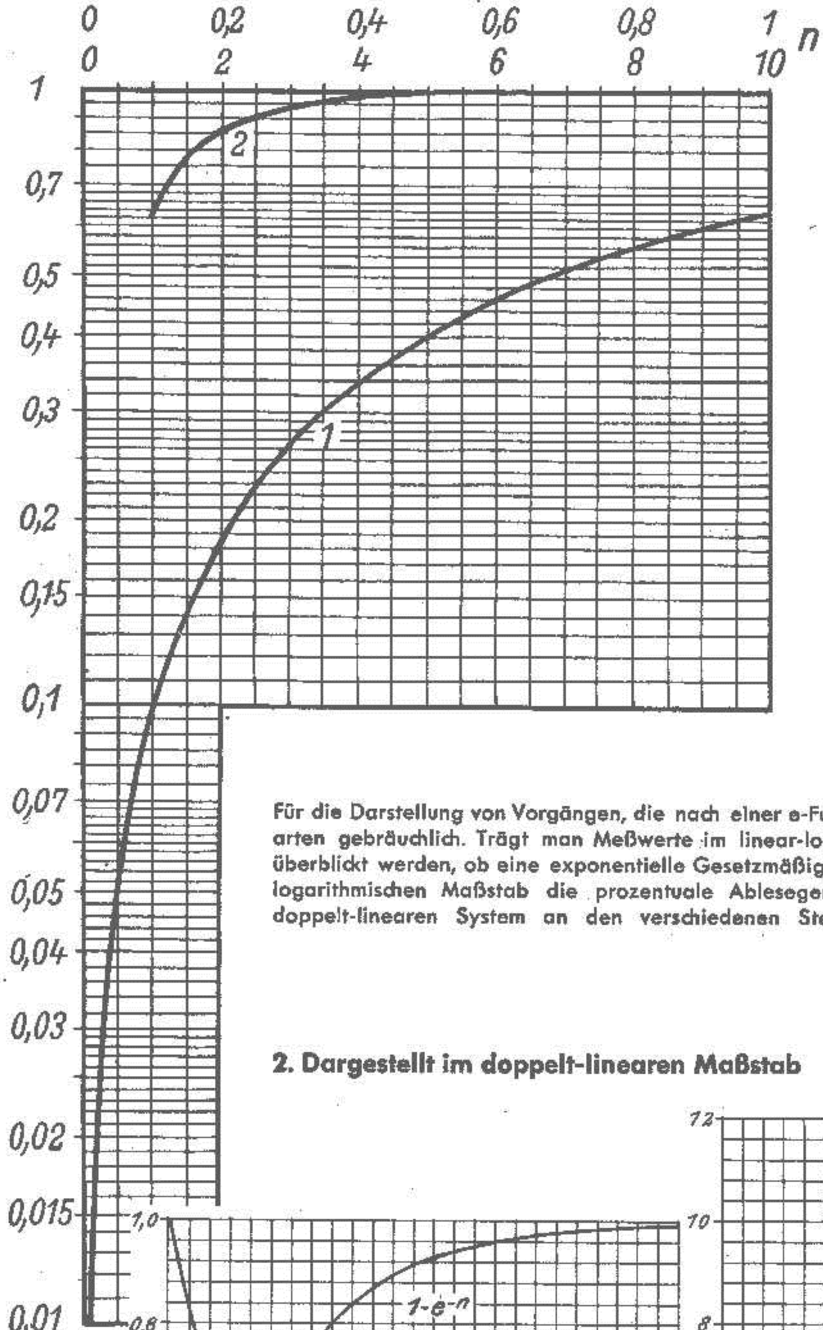


e^n

Kurve	gilt für n von	dabei läuft e^n von
1	0 ... 1	1 ... 2,7
2	1 ... 2	2,7 . 7,4
11	0 ... 2,3	1 ... 10
12	2,3 ... 4,6	10 ... 10^2
13	4,6 ... 6,9	10^2 ... 10^3
14	6,9 . . 9,2	10^3 ... 10^4

e^{-n}

Kurve	gilt für n von	dabei läuft e^{-n} von
1	0 ... 1	1 ... 0,37
2	1 ... 2	0,37 ... 0,135
11	0 ... 2,3	1 ... 10^{-1}
12	2,3 ... 4,6	10^{-1} ... 10^{-2}
13	4,6 ... 6,9	10^{-2} ... 10^{-3}
14	6,9 ... 9,2	10^{-3} ... 10^{-4}

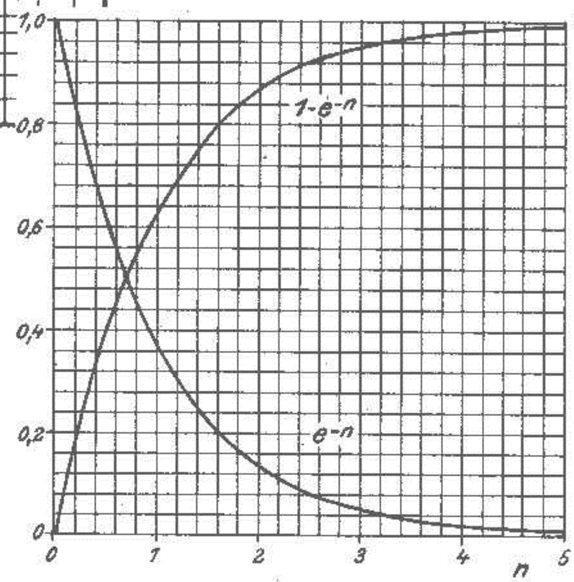


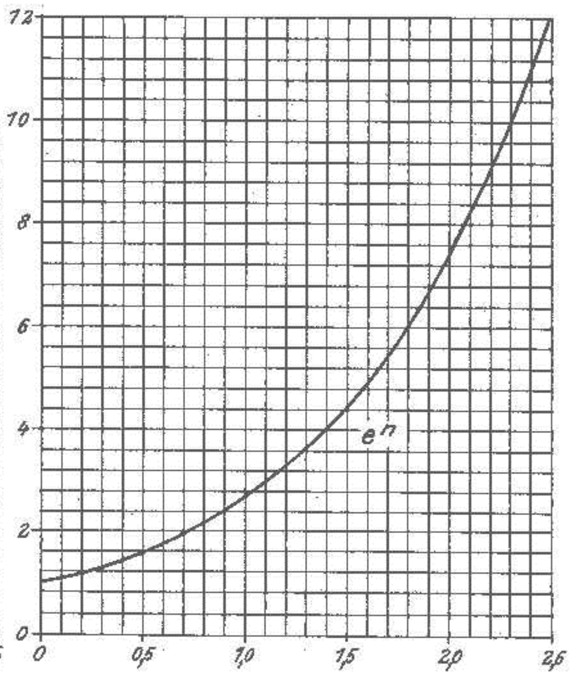
$1 - e^{-n}$

Kurve	gilt für n von	dabei läuft $1-e^{-n}$ von
1	0 … 1	0 … 0,632
2	1 … 10	0,632 … 1

Für die Darstellung von Vorgängen, die nach einer e-Funktion verlaufen, sind beide Diagrammarten gebräuchlich. Trägt man Meßwerte im linear-logarithmischen Maßstab auf, kann sofort überblickt werden, ob eine exponentielle Gesetzmäßigkeit vorliegt. Außerdem bleibt im linear-logarithmischen Maßstab die prozentuale Ablesegenauigkeit konstant, während diese im doppelt-linearen System an den verschiedenen Stellen der Kurve verschieden groß ist.

2. Dargestellt im doppelt-linearen Maßstab





Nachdruck verboten!

B. Tabelle 1 bis 6

Tabelle 1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
e^n $n = 0 \ldots 1$	0,0	1,000	1,010	1,020	1,030	1,041	1,051	1,062	1,073	1,083	1,094	
	0,1	1,105	1,116	1,127	1,139	1,150	1,162	1,174	1,185	1,197	1,209	
	0,2	1,221	1,234	1,246	1,259	1,271	1,284	1,297	1,310	1,323	1,336	
	0,3	1,350	1,363	1,377	1,391	1,405	1,419	1,433	1,448	1,462	1,477	
	0,4	1,492	1,507	1,522	1,537	1,553	1,568	1,584	1,600	1,616	1,632	
	0,5	1,649	1,665	1,682	1,699	1,716	1,733	1,751	1,768	1,786	1,804	
	0,6	1,822	1,840	1,859	1,878	1,896	1,916	1,935	1,954	1,974	1,994	
	0,7	2,014	2,034	2,054	2,075	2,096	2,117	2,138	2,160	2,181	2,203	
	0,8	2,226	2,248	2,271	2 293	2,316	2,340	2,363	2,387	2,411	2,435	$e^1 =$
	0,9	2,460	2,484	2,509	2,535	2,560	2,586	2,612	2,638	2,664	2,691	2,718

Tabelle 2	n	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	
e^n $n = 1 \ldots 10$	1,	2,718	3,004	3,320	3,669	4,055	4,482	4,953	5,474	6,050	6,686	
	2,	7,389	8,166	9,025	9,974	11,02	12,18	13,46	14,88	16,44	18,17	
	3,	20,09	22,20	24,53	27,11	29,96	33,12	36,60	40,45	44,70	49,40	
	4,	54,60	60,34	66,69	73,70	81,45	90,02	99,48	109,9	121,5	134,3	
	5,	148,4	164,0	181,3	200,3	221,4	244,7	270,4	298,9	330,3	365,0	
	6,	403,4	445,9	492,7	544,6	601,8	665,1	735,1	812,4	897,8	992,3	
	7,	1097	1212	1339	1480	1636	1808	1998	2208	2441	2697	
	8,	2981	3294	3641	4024	4447	4915	5432	6003	6634	7332	$e^{10} =$
	9,	8103	8955	9897	10938	12088	13360	14765	16318	18034	19930	22026

Tabelle 3	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
e^{-n} $n = 0 \ldots 1$	0,0	1,000	0,990	0,980	0,970	0,961	0,951	0,942	0,932	0,923	0,914	
	0,1	0,905	0,896	0,887	0,878	0,869	0,861	0,852	0,844	0,835	0,827	
	0,2	0,819	0,811	0,803	0,795	0,787	0,779	0,771	0,763	0,756	0,748	
	0,3	0,741	0,733	0,726	0,719	0,712	0,705	0,698	0,691	0,684	0,677	
	0,4	0,670	0,664	0,657	0,651	0,644	0,638	0,631	0,625	0,619	0,613	
	0,5	0,607	0,600	0,595	0,589	0,583	0,577	0,571	0,566	0,560	0,554	
	0,6	0,549	0,543	0,538	0,533	0,527	0,522	0,517	0,512	0,507	0,502	
	0,7	0,497	0,492	0,487	0,482	0,477	0,472	0,468	0,463	0,458	0,454	
	0,8	0,449	0,445	0,440	0,436	0,432	0,427	0,423	0,419	0,415	0,411	$e^{-1} =$
	0,9	0,407	0,403	0,399	0,395	0,391	0,387	0,383	0,379	0,375	0,372	0,368

Tabelle 4	n	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	
e^{-n} $n = 1 \ldots 10$	1,	0,368	0,333	0,301	0,273	0,247	0,223	0,202	0,183	0,165	0,150	
	2,	0,135	0,122	0,111	0,100	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	
	3,	0,0498	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	
	4,	0,0183	0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,01005	0,009095	0,00823	0,007447	
	5,	0,006738	0,006097	0,005517	0,004992	0,004517	0,004087	0,003698	0,003346	0,003028	0,002740	
	6,	0,002479	0,002243	0,002029	0,001836	0,00166	0,001503	0,001360	0,001231	0,001114	0,001008	
	7,	0,0009119	0,0008251	0,0007466	0,0006755	0,000611	0,000553	0,0005005	0,0004529	0,0004097	0,0003708	
	8,	0,0003355	0,0003036	0,0002746	0,0002485	0,0002249	0,0002035	0,0001841	0,0001666	0,0001507	0,0001364	$e^{-10} =$
	9,	0,0001234	0,0001117	0,0001010	0,0000914	0,0000827	0,0000749	0,0000677	0,0000613	0,0000555	0,0000502	0,00004540

Tabelle 5	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$1 - e^{-n}$ $n = 0 \ldots 1$	0,0	0	0,01	0,02	0,03	0,039	0,049	0,058	0,068	0,077	0,086	
	0,1	0,095	0,104	0,113	0,122	0,131	0,139	0,148	0,156	0,165	0,173	
	0,2	0,181	0,189	0,197	0,205	0,213	0,221	0,229	0,237	0,244	0,252	
	0,3	0,259	0,267	0,274	0,281	0,288	0,295	0,302	0,309	0,316	0,323	
	0,4	0,330	0,336	0,343	0,349	0,356	0,362	0,369	0,375	0,381	0,387	
	0,5	0,393	0,400	0,405	0,411	0,417	0,423	0,429	0,434	0,440	0,446	
	0,6	0,451	0,457	0,462	0,467	0,473	0,478	0,483	0,488	0,493	0,498	
	0,7	0,503	0,508	0,513	0,518	0,523	0,528	0,532	0,537	0,542	0,546	
	0,8	0,551	0,555	0,560	0,564	0,568	0,573	0,577	0,581	0,585	0,589	$1 - e^{-1} =$
	0,9	0,593	0,597	0,601	0,605	0,609	0,613	0,617	0,621	0,625	0,628	0,632

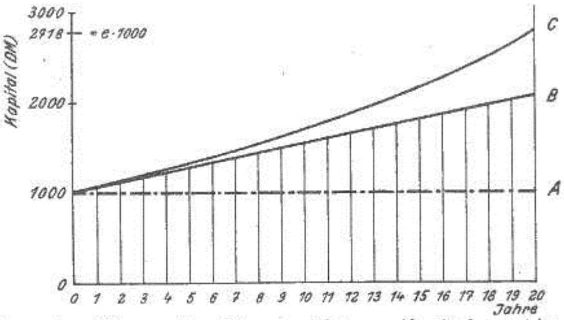
Tabelle 6	n	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	
$1 - e^{-n}$ $n = 1 \ldots 10$	1,	0,632	0,667	0,699	0,727	0,753	0,777	0,798	0,817	0,835	0,850	
	2,	0,865	0,878	0,889	0,900	0,9093	0,9179	0,9257	0,9328	0,9392	0,9450	
	3,	0,9502	0,9550	0,9592	0,9631	0,9666	0,9698	0,9727	0,9753	0,9776	0,9798	
	4,	0,9817	0,9834	0,9850	0,9864	0,9877	0,9889	0,98995	0,990905	0,99177	0,992553	
	5,	0,993262	0,993903	0,994483	0,995008	0,995483	0,995913	0,996302	0,996654	0,996972	0,997260	
	6,	0,997521	0,997757	0,997971	0,998164	0,99834	0,998497	0,998640	0,998769	0,998886	0,998992	
	7,	0,9990881	0,9991749	0,9992534	0,9993245	0,999389	0,999447	0,9994995	0,9995471	0,9995903	0,9996292	
	8,	0,9996645	0,9996964	0,9997254	0,9997515	0,9997751	0,9997965	0,9998159	0,9998334	0,9998493	0,9998636	$1 - e^{-10} =$
	9,	0,9998766	0,9998883	0,9998990	0,9999086	0,9999173	0,9999251	0,9999323	0,9999387	0,9999445	0,9999498	0,99995460

C. Erklärung für die hervorragende Bedeutung der Zahl e

(siehe auch Otto Schmid, Mathematik des Funktechnikers 1940, Seite 222)

Die e-Funktion verkörpert das organische Wachstum in der Natur. Dabei versteht man unter organischem Wachstum, daß alle Teilchen einer bestimmten Art in gleicher Zeit prozentual um den gleichen Betrag wachsen oder abnehmen. Eine solche organisch wachsende Größe wächst in der natürlichen Zeiteinheit auf den e-fachen Betrag an. Diese natürliche Zeiteinheit ist die Zeit, die zur Verdopplung der ursprünglichen Größe notwendig wäre, wenn diese allein am Wachstum beteiligt wäre und die während der natürlichen Zeiteinheit hinzugekommene Zunahme keinen Anteil daran hätte.

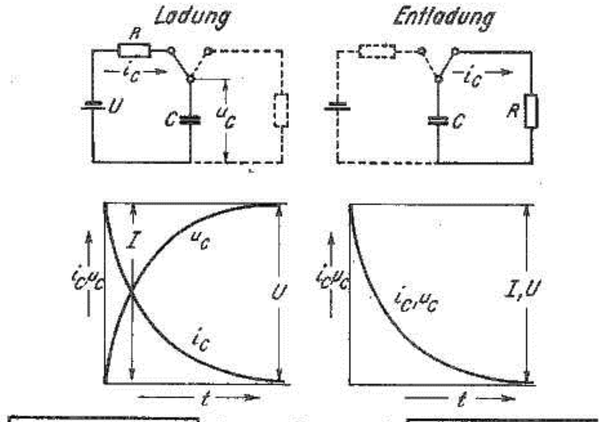
Am besten wird das durch ein Beispiel veranschaulicht. Ein Kapital von 1000 DM bei 5% bringt pro Jahr 50 DM Zinsen. Werden die Zinsen nicht zum Kapital geschlagen, dann verdoppelt sich das Kapital in 20 Jahren; das ist die natürliche Zeiteinheit. Werden dagegen die Zinsen in sehr kleinen Abständen zum Kapital geschlagen, d. h. wächst das Kapital organisch, dann ist es in 20 Jahren auf e × 1000 = 2718 DM angewachsen.



A = ohne Zinsen; B = Zinsen nicht zum Kapital geschlagen, Zinssumme = Kapital; C = Endwert bei Zinseszins (und sehr kleinen Abrechnungszeiten)

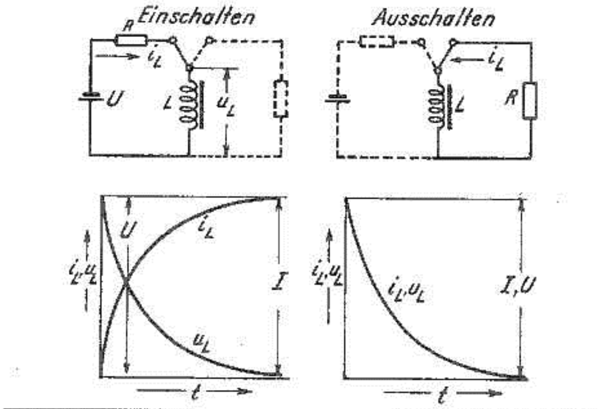
D. Einige Vorgänge in der Nachrichtentechnik, die nach einer e-Funktion verlaufen

1. Ladung und Entladung eines Kondensators



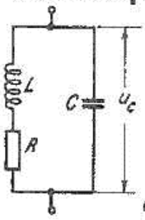
$u_c = U \cdot (1 - e)^{-\frac{t}{T}}$ $i_c = I \cdot e^{-\frac{t}{T}}$	i_c, u_c = Strom und Spannung zur Zeit t. T = Zeitkonstante = R × C	$u_c = U \cdot e^{-\frac{t}{T}}$ $i_c = I \cdot e^{-\frac{t}{T}}$

2. Ein- und Ausschaltvorgang bei einer Induktivität

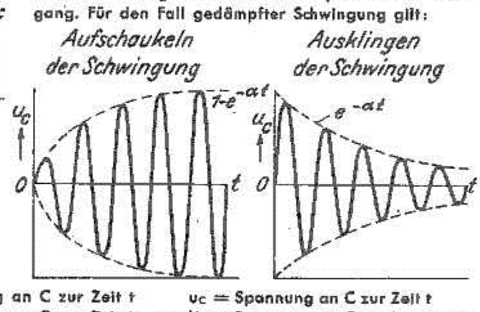


$i_L = I \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$ $u_L = U \cdot e^{-\frac{t}{T}}$	i_L, u_L = Strom und Spannung zur Zeit t T = Zeitkonstante $\frac{L}{R}$	$i_L = I \cdot e^{-\frac{t}{T}}$ $u_L = U \cdot e^{-\frac{t}{T}}$

3. Gedämpfter Schwingungskreis



Ist das Dämpfungsglied $\alpha = \frac{R}{2L}$ nicht zu vernachlässigen, dann erhält man eine gedämpfte Schwingung, oder bei noch größerem R einen aperiodischen Vorgang. Für den Fall gedämpfter Schwingung gilt:



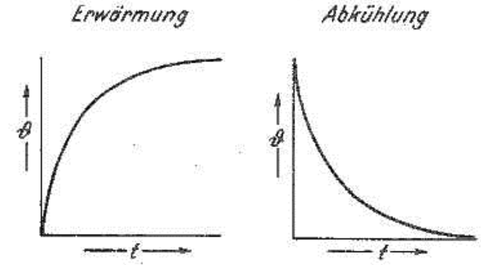
u_c = Spannung an C zur Zeit t
U_0 = Spannung an C zur Zeit $t = \infty$

u_c = Spannung an C zur Zeit t
U_0 = Spannung an C zur Zeit $t = 0$

$$\boxed{u_c = U_0(1 - e^{-\alpha t})(\cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega} \cdot \sin\omega t)} \quad \boxed{u_c = U_0 \cdot e^{-\alpha t}(\cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega} \cdot \sin\omega t)}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}; \; \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

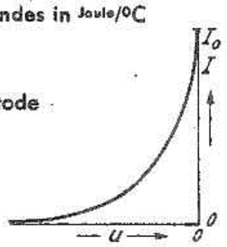
4. Erwärmung und Abkühlung von Widerständen



$$\vartheta = \frac{W}{A}\left(1 - e^{-\frac{A}{K}t}\right) \qquad \vartheta = \frac{W}{A}\, e^{-\frac{A}{K}t}$$

ϑ = Temperaturerhöhung des Widerstandes zur Zeit t in °C
W = Belastung des Widerstandes in Watt
A = Konstante der Wärmeabgabefähigkeit in Watt/°C
K = Wärmekapazität des Widerstandes in Joule/°C

5. Anlaufstromgesetz



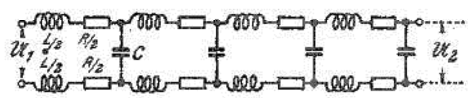
Der Stromübergang von einer Katode zu einer **negativen** Elektrode ist durch das Anlaufstromgesetz bestimmt:

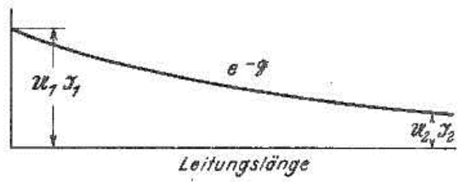
$$I = I_0 \cdot e^{u/U_T}$$

(gültig für $u < 0$)

I = Strom bei der Spannung u
I_0 = Strom bei der Spannung $u = 0$
U_T (V) = eine Röhrenkonstante

6. Leitungsdämpfung





Die Dämpfung auf einer Doppelleitung (Paralleldraht- oder konzentrische Leitung) ist gegeben durch:

$$\frac{\mathfrak{U}_2}{\mathfrak{U}_1} = \frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1} = e^{-\mathfrak{g}} \qquad \mathfrak{g} = b + j\,a$$
$$\frac{\mathfrak{N}_2}{\mathfrak{N}_1} = e^{-2\mathfrak{g}}$$

b = Dämpfungsmaß
a = Phasenmaß

Auf Grund dieses exponentiellen Zusammenhanges der elektrischen Größen am Anfang und Ende einer Leitung ist als Maß für die Leitungsdämpfung b gewählt worden:

$$b = \ln\frac{\mathfrak{U}_2}{\mathfrak{U}_1} = \ln\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1} \text{ (Neper)}$$

7. Beispiel aus den Nachbargebieten der Nachrichtentechnik

In der Katodenphysik erscheint für die Adsorption von Sauerstoff an Wolfram die Formel:

$$\tau = \tau_0\, e^{\frac{-Q}{KT}}$$

τ = Adsorptionszeit (sec.)
τ_0 = Konstante = $8 \cdot 10^{-14}$ sec., ist gegeben durch Schwingungsdauer der Atome im Metallgitter
Q = Verdampfungsenergie des Sauerstoffes
T = absolute Temperatur
K = Boltzmannsche Konstante.

Nachdruck verboten!

Berichtigung (1954): Formel für „ue" ist zu ersetzen durch ($1\text{-}e^{-\frac{t}{T}}$) Abschnitt D4: ϑ=Temperatur~~erhöhung~~ des Widerstandes zur Zeit t in °C

AbschnittD7, letzte Zeile: „K" ist zu ersetzen durch „k"