Aus FUNKSCHAU 5/1956, im Original 2-spaltig. Digitalisiert 11/2016 von Eike Grund für http://www.radiomuseum.org mit freundlicher Genehmigung der FUNKSCHAU-Redaktion. Die aktuellen Ausgaben der FUNKSCHAU finden Sie unter http://www.funkschau.de

Der Differenzialquotient Teil 1

A. Der Begriff des Differentialquotienten

Gegeben sei eine Kurve (Bild 1). Dem Abszissenwert x ist ein Ordinatenwert y zugeordnet (P_1). Wird x um den Betrag Δx verändert, so ändert sich y auf $y + \Delta y$ (P_2).

Der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (der Differenzenquotient) gibt das mittlere Steigungsmaß der Kurve zwischen den zwei betrachteten Punkten P_1 und P_2 an.

Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ ist nun der Grenzwert, zu dem $\frac{\Delta y}{\Delta x'}$ der Differenzenquotient (d. h. der Quotient zusammengehöriger Zunahmen) hinstrebt, falls Δx unendlich klein wird.
Dabei ist vorausgesetzt, daß es sich um eine Funktion handelt, die in dem betrachteten Punkt stetig gekrümmt ist.

Geometrisch gedeutet ist der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ die Steigung der in dem betrachteten Punkt P an die Kurve gelegten Tangente. Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ von einer differenzierbaren Funktion y = f (x) ist ebenfalls eine Funktion von x. Man bezeichnet ihn als (erste) Ableitung von y = f (x):

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

B. Berechnungsformeln

Fall 1. Lineare Funktion

$$y = ax + b$$
$$\frac{dy}{dx} = y' = a$$

Fall 1a. Quadratische Funktion

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$\frac{dy}{dx} = y' = 2ax+b$$

Konstante Faktoren (z. B. a, b) werden von der Differenzierung nicht betroffen.

Fall 2. Summe oder Differenz von Funktionen

z. B.: u = f (x) und v = f (x)

$$y = u + v \qquad\qquad y = u - v$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

Die Summanden werden einzeln (gliedweise) differenziert.

Fall 3. Produkt von Funktionen

$$y = u \cdot v$$
$$\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$y = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \ldots)}{dx} = \frac{du_1}{dx} \cdot u_2 \cdot u_3 \ldots + u_1 \cdot \frac{du_2}{dx} \cdot u_3 \ldots + u_1 \cdot u_2 \cdot \frac{du_3}{dx} \ldots$$

Der Differenzialquotient jeder Funktion wird mit den anderen Funktionen multipliziert und die Summe gebildet.

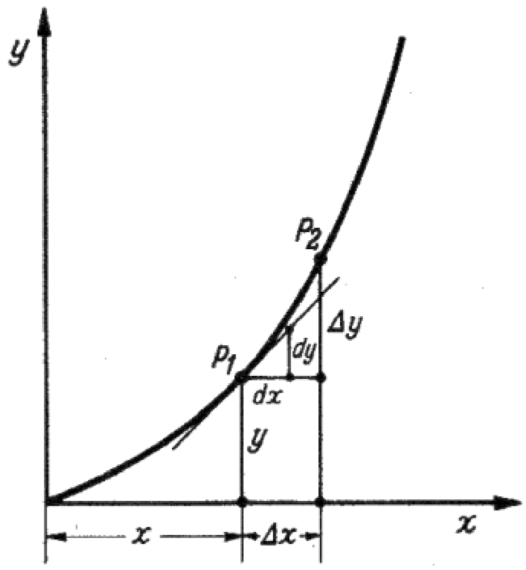


Bild 1. Geometrische Deutung des Differenzen- und Differentialquotienten

Fall 4.Quotient von Funktionen

$$y = \frac{u}{v} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Fall 5. Potenzen

$$y = x^n \qquad \frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

gilt für beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Werte von n.

$$\frac{dx^0}{dx} = 0$$

Fall 6. Kettenregel (Funktion von Funktion)

Ist y eine Funktion von z, z eine Funktion von x und sind beide Funktionen differenzierbar, so gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \qquad \text{oder} \qquad y = y(z); \quad z = z(u); \quad u = u(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Fall 7. Goniometrische (trigonometrische) Funktionen

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d\ tg\ x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

$$\frac{d\ \mathrm{cotg}\ x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \mathrm{cotg}^2 x\right)$$

Fall 8. Zyklometrische (Arcus-) Funktionen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\ \mathrm{arc}\sin x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d\ \mathrm{arc}\cos x}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}\right\}$$ Die Quadratwurzeln sind für zwischen -1 und +1 liegende Werte positiv

$$\frac{d\ \mathrm{arc\,tg}\, x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d\ \mathrm{arc\,cotg}\, x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Fall 9. Hyperbel- und Areafunktionen

$$\frac{d\,\mathfrak{Sin}x}{dx}=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})=\mathfrak{Cos}x$$

$$\frac{d\,\mathfrak{Cos}x}{dx}=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=\mathfrak{Sin}x$$

$$\frac{d\,\mathfrak{Tg}x}{dx}=1-\mathfrak{Tg}^{2}x=\frac{1}{\mathfrak{Cos}^{2}x}=\frac{4}{(e^{x}+e^{-x})^{2}}$$

$$\frac{d\,\mathfrak{Cotg}\,x}{dx}=1-\mathfrak{Ctg}^{2}x=\frac{1}{\mathfrak{Sin}^{2}x}=-\frac{4}{(e^{x}-e^{-x})^{2}}$$

$$\frac{d\,\mathfrak{ArSin}\,x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^{2}+1}}$$

$$\frac{d\,\mathfrak{ArCos}\,x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^{2}-1}}$$

$$\frac{d\,\mathfrak{ArTg}\,x}{dx}=\frac{1}{1-x^{2}}\qquad\left[|x|\leq 1\right]$$

$$\frac{d\,\mathfrak{ArCotg}\,x}{dx}=\frac{1}{1-x^{2}}\qquad\left[|x|\geq 1\right]$$

Fall 10. Exponentialfunktion

$$\frac{de^{x}}{dx}=e^{x}$$ die natürliche Exponentialfunktion ist identisch mit ihrer Ableitung

$$\frac{da^{x}}{dx}=a^{x}\ln a$$

Fall 11. Logarithmische Funktion

$$\frac{d\ln x}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d\,{}_a\log x}{dx}=\frac{1}{x\cdot\ln a}$$

Fall 12. Umkehrfunktion, inverse Funktion.

Die inverse Fuktion zu $y = f(x)$ heiße $x = g(y)$

Dann gilt für den Differenzialquotienten der inversen Funktion $g'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$

C. Beispiele

Zu 1 a) $y = -3x^{2} + 50x - 76$

$$\frac{dy}{dx} = -3\cdot 2x + 50\cdot 1 + 0 = -6x + 50$$

Zu 2 und 5) $y = x^{2} + \sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx}=2x+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=2x+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=2x+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

Zu 3 und 5) $y = x^{5}$

Gerechnet nach 3) $y = x^{5} = x^{2}\cdot x^{3}$

$u = f(x) = x^{2}$ $\qquad$ $v = F(x) = x^{3}$

$y' = v\cdot u' + u\cdot v'$

Zu 4 und 5) $y = \dfrac{1}{x^{5}} = x^{-5}$

Gerechnet nach 4)

$u = f(x) = 1$ $\qquad$ $v = F(x) = x^{5}$

$$y' = \frac{v\cdot u' - u\cdot v'}{v^{2}}$$

$$y' = \frac{x^{5}\cdot 0 - 1\cdot 5x^{4}}{x^{10}} = -5\cdot x^{-6}$$

Gerechnet nach 5)

$y = x^{-5}$ $\qquad$ $y' = -5x^{-6} = \dfrac{-5}{x^{6}}$

$$y' = x^3 \cdot 2x + x^2 \cdot 3x^2 = 2x^4 + 3x^4 = 5x^4$$

Gerechnet nach 5)

$$y' = 5x^{5-1} = 5x^4$$

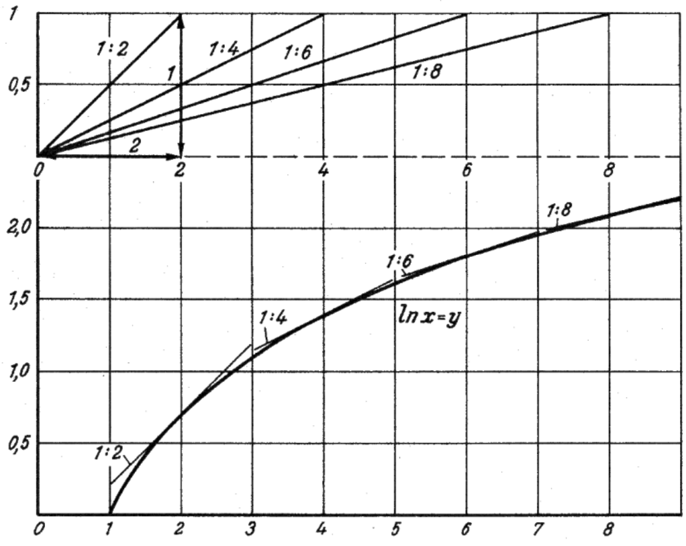


Bild 2. Die Steigung der Kurve ln x in den Punkten x = 2, 4, 6, 8, dargestellt durch die Tangenten in den zugehörigen Kurvenpunkten. In der oberhalb dieser Kurve befindlichen Hilfskonstruktion ist die Lage dieser vier Tangenten gemäß dem Rechenbeispiel C 11 bestimmt

Zu 5) $y = \sqrt[4]{x} = x^{1/4}$

$$y' = \frac{1}{4}x^{1/4-1} = \frac{1}{4}x^{-3/4} = \frac{1}{4x^{3/4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

Zu 6, 7 und 11) $y = \ln \sin x$

$$y = \ln \sin x = f(z) = \ln z$$

$$z = f(x) = \sin x$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z} \qquad \frac{dz}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x$$

Zu 7 (siehe das nachfolgende Beispiel zur Berechnung der Beschleunigung).

Zu 8 und 6) $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$

$$y = \operatorname{arc\,tg} z \qquad y' = \frac{1}{1+z^2}$$

$$z = \frac{1}{x} \qquad z' = -x^{-2}$$

$$y = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot -x^{-2} = -\frac{1}{x^2+1}$$

Zu 9 und 4) $\frac{d\,\mathfrak{Ctg}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,x}{\mathfrak{Sin}\,x}\right) = \frac{\mathfrak{Sin}^2 x - \mathfrak{Cof}^2 x}{\mathfrak{Sin}^2 x}$

$$= 1 - \mathfrak{Ctg}^2 x$$

Da $\mathfrak{Cof}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 x = 1$ gilt ferner

$$\frac{d\,\mathfrak{Ctg}\,x}{dx} = -\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 x}$$

Zu 10) $y = a^x = e^{x \ln a}$

$$y' = a^x \ln a$$

$$\frac{dy'}{dx} = y'' = \frac{d\,(a^x \cdot \ln a)}{dx} = \ln a \cdot a^x \cdot \ln a$$

$$= a^x \cdot (\ln a)^2$$

Zu 11) Wie groß ist die Steigung der Kurve ln x im Punkte x = 2, 4, 6 und 8.

Die erste Ableitung einer Funktion $\left(\frac{dy}{dx} = y'\right)$ gibt die Steigung der in dem gegebenen Punkt an die Kurve gelegten Tangente (Bild 2).

$$y = \ln x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy_1}{dx}\ (\text{für } x_1 = 2) = \frac{1}{2}; \quad \frac{dy_2}{dx}\ (\text{für } x_2 = 4) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{dy_3}{dx}\ (\text{für } x_3 = 6) = \frac{1}{6}; \quad \frac{dy_4}{dx}\ (\text{für } x_4 = 8) = \frac{1}{8}$$

Zu 12) Gesucht ist die erste Ableitung von $y = \arcsin x$

$$y = f(x) = \arcsin x$$

Die Umkehrfunktion lautet

$$x = g(y) = \sin y$$

Dann ist $f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\cos y}$

Da gilt: $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$,

ist $f'(x) = \frac{d\,(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

D. Schüttelmaschine

Bestimmung der Beschleunigung aus Hub und Schüttelfrequenz (Bild 4). Vorausgesetzt ist eine sinusförmige Bewegung, wie in Bild 3 dargestellt. Dann gilt für den zur Zeit t zurückgelegten Weg

$$S = A \cdot \sin \omega t = f(t)$$

für die dabei vorhandene Geschwindigkeit

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos \omega t = f'(t)$$

und Beschleunigung

$$b = A \cdot \omega^2 (-\sin \omega t) = f''(t)$$

Der Maximalwert von b wird erreicht für

$\sin \omega t = \pm 1$ und beträgt $b_{max} = \pm A\omega^2$

B e i s p i e l

Gegeben: Gesamter Hub = 2 A = 0,3 cm

Schüttelfrequenz = 50 Hz

$$b_{max} = 0{,}15 \cdot 2^2 \cdot \pi^2 \cdot 50^2 \sim 15\,000 \text{ cm/sec}^2$$

$$1 \text{ g} = 981 \text{ cm/sec}^2$$

$$b_{max} = \frac{15\,000}{981} \sim 15 \text{ g}$$

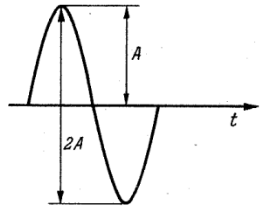
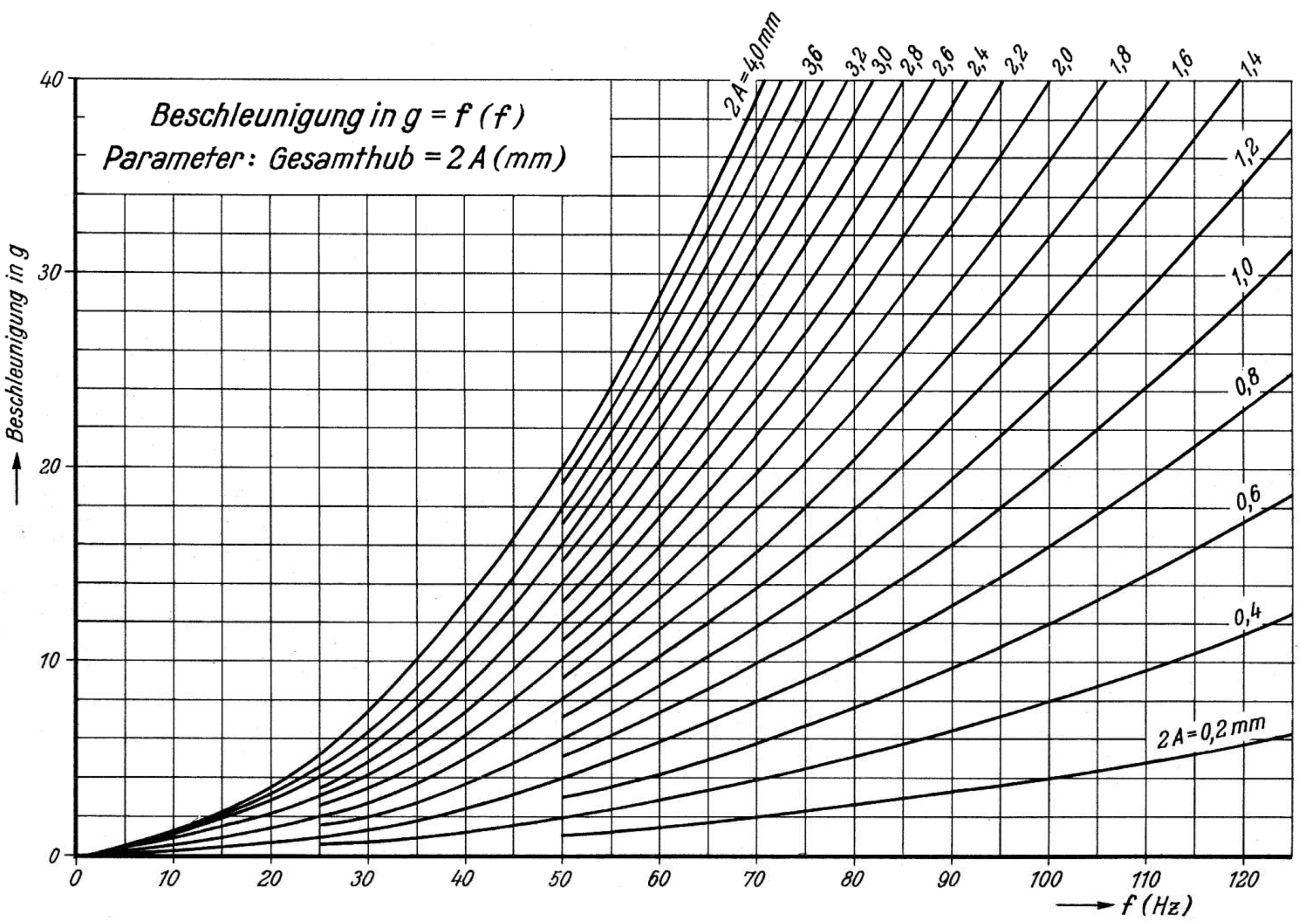


Bild 3. Der Schwingungsvorgang bei einer Schüttelmaschine



E: Die partielle Differentiation

1. Die Bedeutung der partiellen Differentiation:

In den Abschnitten A...D sind nur Funktionen von einer Veränderlichen (y = f (x)) behandelt worden. Die partielle Differentiation ist anzuwenden, wenn Funktionen von mehreren Veränderlichen vorliegen. Z. B. ist die Fläche eines Rechtecks (z) abhängig von der Länge der beiden Seiten (x und y), also z = f (x, y).

Um nun in einem solchen Fall das totale Differential dz bilden zu können, differentiiert man partiell.

Die eine der beiden Variablen x oder y behandelt man als Konstante, damit wird z = f (x, y) eine Funktion von y oder x allein. Unter dieser Annahme läßt sich ohne weiteres der Differentialquotient bilden; man nennt ihn aber den partiellen, da von den Veränderlichen nur eine als wirklich Veränderliche behandelt wird.

Für die Funktion z = f (x, y) ergeben sich also zwei partielle Differentialquotienten:

x veränderlich, y konstant	x konstant, y veränderlich
$\frac{\delta z}{\delta x}$	$\frac{\delta z}{\delta y}$

Betrachtet man x und y als veränderlich, dann bildet sich das totale Differential aus der Summe der beiden partiellen Differentiale $dz = \frac{\delta z}{\delta x} \cdot dx + \frac{\delta z}{\delta y} \cdot dy$ (1)

Auch diese Beziehung gilt wie die unter A und B aufgestellten unter der Voraussetzung, daß die Funktion stetig ist, d. h., daß sich $\frac{\delta z}{\delta x}$ und $\frac{\delta z}{\delta y}$ bilden lassen.

Liegt eine Funktion mit mehr als zwei Veränderlichen (x1, x2, x3 ...) vor, so gilt für das totale

Differential: $$dz = \frac{\delta z}{\delta x_1} dx + \frac{\delta z}{\delta x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\delta z}{\delta x_n} dx_n$$

2. Beispiel

$$z = \sin x + \cos y$$

$$dz = \frac{\delta z}{\delta x} \cdot dx + \frac{\delta z}{\delta y} \cdot dy$$

$$dz = \cos x \, dx — \sin y \, dy$$

3. Anwendung der partiellen Differentiation zur Lösung impliziter oder verwickelter Funktionen

Als implizit oder unentwickelt bezeichnet man eine Funktion, in der sich die Variablen nur auf einer Seite der Gleichung befinden. Z. B. F (x, y) = C.

Die Gleichung zeigt, daß in diesem Fall nur die eine Variable (z. B. x) beliebig geändert werden kann, während die Größe der anderen (y) sich durch die Gleichung ergibt.

Das Differential von F (x, y) kann also ohne weiteres gebildet werden, wenn es gelingt, die Gleichung nach y aufzulösen, also zu erhalten: y = f (x). In vielen Fällen ist eine solche Auflösung umständlich oder gar unmöglich.

Es ist F (x, y) = C (2)
Dann muß F (x + dx, y + dy) ebenfalls = C sein (3)

Wären x und y beides unabhängige Variablen, dann würde sich nach (1) bei Änderung von x auf x + dx und y auf y + dy ein bestimmter Wert für dz ergeben. Aus (2) und (3) folgt aber, daß dz = 0 sein muß. Folglich gilt: $\frac{\delta F}{\delta x} \cdot dx + \frac{\delta F}{\delta y} \cdot dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{\frac{\delta F}{\delta y}}$$

Beispiel

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Ist y eine komplizierte Funktion, so kann sie meist durch zwei oder mehrere Teilfunktionen dargestellt werden.

$$y = f(x) = F(u, v) \qquad dy = \frac{\delta F}{\delta u} \cdot du + \frac{\delta F}{\delta v} \cdot dv$$

Beispiel:

$y = (\sin x)^x$

$y = u^v = F(u,v)$ || $u = \sin x, \ v = x$

$$dy = \frac{\delta F}{\delta u} \cdot du + \frac{\delta F}{\delta v} \cdot dv$$

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \cdot \ln u \cdot \frac{dv}{dx}$$ [vgl. B. Fall 5 u. 10]

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (\sin x)^{x-1} \cdot \cos x + (\sin x)^x \cdot \ln \sin x$$

Lösung des gleichen Beispiels nach B. Fall 6

$$y = (\sin x)^x$$

Die Ausrechnung nach der Potenzregel (B. Fall 5) ist nicht möglich, da diese nur für konstante

Exponenten Gültigkeit hat. Man benutzt zur Lösung die Kettenregel, indem man zunächst umformt.

$y = (\sin x)^x = (e^{\ln \sin x})^x$

$$y = e^w \qquad \left|\; \begin{aligned} w &= x \cdot \ln \sin x \\ &= u \cdot v \\ u &= x \\ v &= \ln \sin x \end{aligned} \right.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

$= e^w \cdot (v \cdot u' + u \cdot v')$ [vgl. B. Fall 3 u. 10]

$$\frac{dy}{dx} = e^w \quad (\ln \sin x + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x) \qquad \left[\text{vgl. B. Fall 6 u. 11}\right]$$

$$= (\sin x)^x \cdot \ln \sin x + x (\sin x)^x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = (\sin x)^x \cdot \ln \sin x + x (\sin x)^{x-1} \cdot \cos x$$

Schrifttum

Otto Schmid, Die Mathematik des Funktechnikers. Franckh'sche Verlagshandlung Stuttgart 1953

Georg Scheffers, Lehrbuch der Mathematik. Walter de Gruyter *u.* Co. Berlin 1948