Die Begriffe des elektrischen Schwingkreises

Von W. RENTSCH

Im folgenden werden an Hand vereinfachter Berechnungen die Größen des Schwingungskreises definiert und besprochen, die sich insbesondere auf dessen Güte und Resonanzschärfe beziehen. Dabei werden die grundsätzlichen Vorgänge als bekannt vorausgesetzt. Schriftleitung.

Das logarithmische Dämpfungsdekrement, die Resonanzschärfe, der Dämpfungsfaktor oder was dasselbe ist, die „45°-Verstimmung" sollen alle dazu dienen, einen Schwingkreis in seiner Güte zu beurteilen. Im folgenden sollen die Begriffe erläutert und ihre zweckmäßige Anwendung bei dem Rechnen mit Schwingkreisen gezeigt werden.

Bei stationären Schwingungen interessieren Strom-, Spannungs- sowie Widerstandsverhältnisse am Schwingkreis. Als Grundlage der Berechnung hat man die Größen der Schaltelemente. Bei nichtstationären Schwingungen (hier abklingende Schwingung) kann man überdies von dem Schwingungsbild selbst ausgehen. Wir erhalten hier in einfacher Weise das sog. logarithmische Dämpfungsdekrement auch kurz Dekrement genannt. Liegt das Bild einer solchen Schwingung vor (z. B. an Hand eines Oszillogramms), so kann man wie folgt verfahren (Abb. 1):
Die Hüllkurve ist eine Exponentialfunktion. Wir schreiben:

$$\frac{i_t}{i_{(t+T)}} = \varepsilon^{\vartheta}$$

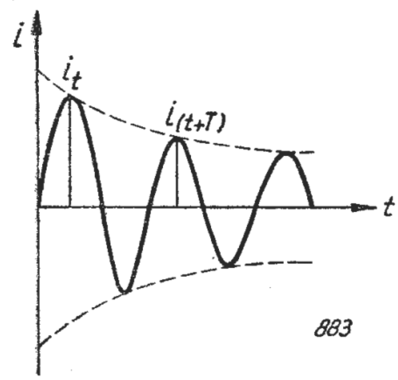

Abb. 1

Und damit das Dekrement:

$$\vartheta = \ln \frac{i_t}{i_{(t+T)}}\,. \qquad (1)$$

Heute arbeiten wir fast ausschließlich mit stationären Schwingungen und damit hat diese Definition ihren Sinn verloren. Wir beziehen uns also grundsätzlich auf die Schaltelemente. Das zweckmäßigste Kriterium finden wir vor, einerseits in dem Verhältnis der Teilspannungen an den Blindwiderständen zur angelegten Spannung (Reihenresonanz) und andererseits im Verhältnis des Schwingstroms zu dem in den Kreis fließenden Strom (Parallelresonanz). Dieses Verhältnis bezeichnet man mit Resonanzschärfe ϱ. Ihre Größe ist gemäß der Definition gleich der Resonanzüberhöhung. Diese Festlegung ist sinnfälliger als ihr Reziprokwert, der Dämpfungsfaktor *d*.

Resonanz ist vorhanden, wenn die Blindwiderstände sich gegenseitig gerade zu Null ergänzen. Der Schwingkreis besitzt also im Resonanzfall Ohmschen Charakter.

1. Reihenresonanz:

Der Strom wird nur durch den Ohmschen Widerstand R bestimmt, somit kann man die Klemmenspannung schreiben:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_R = J \cdot R$$

$$U_L = J\omega_r L$$

$$U_C = \frac{J}{\omega_r C}\,.$$

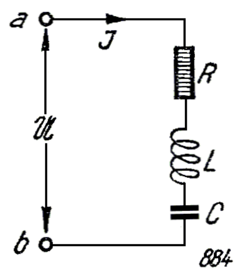

Abb. 2

Damit ist:

$$\left(\frac{\mathfrak{U}_L}{\mathfrak{U}}\right)_{res} = \left(\frac{\mathfrak{U}_C}{\mathfrak{U}}\right)_{res} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{\frac{1}{\omega_r C}}{R} = \varrho. \quad . \; . \; . \qquad (2)$$

2. Parallelresonanz:

Der Strom wird durch den Resonanzwiderstand $\mathfrak{R}_{ab} = \mathrm{R}_{ab} = \mathrm{R}_p$ bestimmt.

$$J = J_R = \frac{\mathfrak{U}}{R_p} \qquad J_L = \frac{\mathfrak{U}}{\omega_r L} \qquad J_C = \frac{\mathfrak{U}}{\frac{1}{\omega_r C}}$$

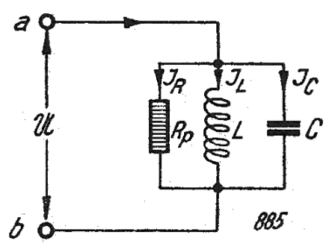

Abb. 3

$$\left(\frac{J_L}{J}\right)_{res} = \left(\frac{J_C}{J}\right)_{res} = \frac{R_p}{\omega_r L} = \varrho. \quad . \quad . \qquad (3)$$

Für den Parallelresonanzkreis ist noch eine weitere Ersatzschaltung vorhanden, bei der der Ohmsche Widerstand in Reihe zur Induktivität liegt (Abb. 4).

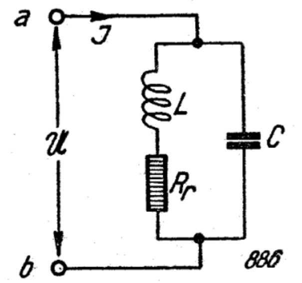

Abb. 4

Wir berechnen zunächst den reellen Ersatzwiderstand bei Resonanz. Für J gilt allgemein: $J = \mathfrak{U}\left(\frac{R_r}{R_r^2 + \omega^2 L^2} + j\left[\omega C - \frac{\omega L}{R_r^2 + \omega^2 L^2}\right]\right)$

Für $\omega_r C - \frac{\omega_r L}{R_r^2 + \omega_r^2 L^2} = 0$ (Resonanzbedingung),

wird der Strom: $J = \mathfrak{U}\,\frac{R_r}{R_r^2 + \omega_r^2 L^2} = \mathfrak{U}\,\frac{1}{R_p}$.

Aus der Resonanzbedingung erhält man aber: $\frac{1}{R_r^2 + \omega_r^2 L^2} = \frac{C}{L}$ und damit: $R_p = \frac{L}{C \cdot R_r}$

Die Resonanzschärfe wird also hier: $\varrho = \frac{\omega_r L}{R_r}$

Und die gegenseitigen Beziehungen: $R_p = \frac{L}{C \cdot R_r} = \varrho^2 R_r; \quad R_r = \frac{L}{C \cdot R_p} = \frac{R_p}{\varrho^2}. \quad . \quad$ (4a,b)

Da für Resonanz: $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{CL}}$ bzw. $\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$, läßt sich ϱ auch wie folgt schreiben:

1.Reihenschalting:

$$\varrho = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{R\omega_r C} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad . \quad . \qquad (5)$$

2. Parallelschaltung

$$\varrho = \frac{R_p}{\omega_r L} = R_p \omega_r C = \frac{\omega_r L}{R_r} = \frac{1}{R_r \omega\, C} = \frac{1}{R_r}\sqrt{\frac{L}{C}} = R_p\sqrt{\frac{C}{L}}. \quad . \quad . \qquad (6)$$

Zur Umrechnung von Resonanzschärfe und Dekrement die Beziehung: $\varrho = \frac{\pi}{\vartheta}$.

Der Reziprokwert der Resonanzschärfe ist einerseits der Dämpfungsfaktor *d (s.* o.) und andererseits die „45°-Verstimmung". Unter letzterem versteht man, daß eine Verstimmung von $v_{45} = \frac{1}{\varrho} \cdot 100\,[\%]$ den absoluten Betrag um den Faktor 1,414 $\left(\sqrt{2}\right)$ bzw. 0,707 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ändert und dabei eine Phasenverschiebung von 45° auftritt. (Wirkwiderstand = Blindwiderstand.)

Zu beachten ist, daß einer Verstimmung von v = 2% eine Änderung der äußeren Frequenz ω von $1\,{}^0/_0$ (aus der Resonanzlage) entspricht [1]).

Wie bekannt, kann man die Verstimmung für Resonanznähe schreiben:

$$v \approx 2\left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}\right)$$

und da man den Frequenzbereich zwischen den beiden Werten ± v_{45} mit Bandbreite bezeichnet, diese leicht durch die Resonanzschärfe und die Resonanzfrequenz ausdrücken :

[1]) Vgl. BARKRAUSEN, Bd. 1, 1937, S. 136.

$$v_{45} \approx \left(\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} \right) \approx \frac{1}{\varrho}$$

$$\omega \approx \omega_r \frac{1 + 2\varrho}{2\varrho}; \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

und $$\Delta f \approx 2\left(f - f_r\right) \approx \frac{f_r}{\varrho}. \; .... (7)$$

Im folgenden wollen wir noch den Schwingkreis bei ganzzahligen vielfachen (Harmonischen) seiner Resonanzfrequenz betrachten.

1. Reihenresonanz:

Für $\mathfrak{R}_{ab}$ gilt allgemein: $\mathfrak{R}_{ab} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$

Im Resonanzfall verschwindet die Blindkomponente: $\mathfrak{R}_{ab} = R = R_{res}.$

Für die höheren Harmonischen ist praktisch: $R < \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$

und wir können für die n'te (n = 2, 3, 4, ...) Harmonische allgemein schreiben:

$$\left|\mathfrak{R}_{ab}\right|_n = n\ \omega_r L - \frac{1}{n\ \omega_r C} = \frac{n^2 - 1}{n}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\left|\mathfrak{R}_{ab}\right|_n = \frac{n^2 - 1}{n}\varrho \cdot R_{res}. \; .... (8)$$

2. Parallelresonanz:

Für $\mathfrak{R}_{ab}$ gilt allgemein: $\mathfrak{R}_{ab} = \dfrac{1}{\dfrac{R_r}{R_r^{\,2} + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \dfrac{\omega L}{R_r^{\,2} + \omega^2 L^2}\right)}.$

Im Resonanzfall verschwindet die Blindkomponente, und es wird:

$$\mathfrak{R}_{ab} = R_{res} = \frac{R_r^{\,2} + \omega_r^{\,2} L^2}{R_r} = \frac{L}{C R_r} \quad \text{(s. o.)}$$

Für die höheren Harmonischen kann man den reellen Anteil, sowie R^2 gegen $\omega^2 L^2$ vernachlässigen und damit für die n'te (n = 2, 3, 4, ...) Harmonische schreiben:

$$\left|\mathfrak{R}_{ab}\right|_n = \frac{1}{n\ \omega_r C - \frac{1}{n\ \omega_r L}} = \frac{n}{n^2 - 1}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\left|\mathfrak{R}_{ab}\right|_n = \frac{n}{n^2 - 1} \cdot \frac{R_{res}}{\varrho}. \; .... (9)$$

Nimmt man z. B. eine gute Resonanzschärfe von ϱ = 200 an, so wird der Widerstand des Parallelschwingkreises bereits für die zweite Harmonische 300 mal kleiner als R_{res}, und zwar kapazitiv. Bei der Reihenschaltung ist es umgekehrt. Der Widerstand wird 300mal größer als R_{res}, und zwar induktiv.

Zum Schluß sei noch auf die zweckmäßige Anwendung der Begriffe Resonanzschärfe und Verstimmung für das Zeichnen von Resonanzkurven hingewiesen. Im besonderen interessieren die Scheinwiderstände.

1. Reihenschaltung:

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{1}{\varrho} + jv\right)$$

$$\left|\mathfrak{R}\right| = R_{res}\sqrt{1 + \varrho^2 v^2}. \; .... (10)$$

2. Parallelschaltung:

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\frac{L}{C}}\,\frac{\varrho}{1+j\varrho v} \qquad\qquad |\mathfrak{R}| = \frac{R_{res}}{\sqrt{1+\varrho^2 v^2}} \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

R_{res} = Resonanzwiderstand, v = Verstimmung = $\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}$.

Als Sonderfall lassen sich herausstellen:

1. Resonanzfall: v = 0, $|\mathfrak{R}|$ = *Rres.*

2. Die „45°-Verstimmung": $v = v_{45} = \frac{1}{\varrho}$

a) Reihenschaltung: $|\mathfrak{R}| = R_{res}\sqrt{2}$

b) Parallelschaltung: $|\mathfrak{R}| = \frac{R_{res}}{\sqrt{2}}$

Wie bereits oben ausgeführt.

Zeichnungen vom Verfasser

---

*Aus FUNK Heft 4/1941 Seiten 49-50, i*m Original 2-spaltig. Digitalisiert 08/2016 von Eike Grund für http://www.radiomuseum.org