Funktechnische Arbeitsblätter

DK 538.565

UF 11

2. Ausgabe

2 Blätter

Reihenschaltung - Parallelschaltung

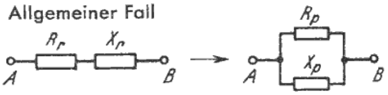
A. Umrechnung mit Formeln

Mit den im folgenden angegebenen Formeln nach a) kann eine Reihenkombination zweier Widerstände oder Leitwerte auf eine Parallelschaltung umgerechnet werden. Ebenso ist nach Tabelle b) auch der umgekehrte Fall möglich.

Die Umrechnung und damit die Entstehung der Formeln gründet sich auf der Voraussetzung, daß durch Übergang von der einen Kombination zur anderen an dem Gesamtwiderstand oder Leitwert, wie er an den Klemmen A B in Erscheinung tritt, nichts geändert wird.

a. Umwandlung einer Reihenschaltung in eine Parallelschaltung

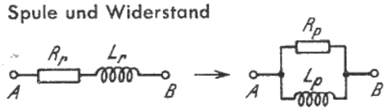
Allgemeiner Fall



$$R_p = \frac{R_r^2 + X_r^2}{R_r}; \quad X_p = \frac{R_r^2 + X_r^2}{X_r}; \quad \mathrm{tg}\,\varphi_p = \frac{X_r}{R_r}$$

$$G_p = \frac{R_r}{R_r^2 + X_r^2}; \quad Y_p = \frac{X_r}{R_r^2 + X_r^2}$$

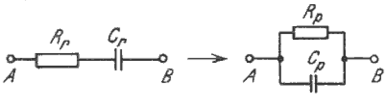
Spule und Widerstand



$$R_p = \frac{R_r^2 + (\omega L_r)^2}{R_r}; \quad L_p = \frac{R_r^2 + (\omega L_r)^2}{\omega^2 L_r}; \quad \mathrm{tg}\,\varphi_p = \frac{\omega L_r}{R_r}$$

$$G_p = \frac{R_r}{R_r^2 + (\omega L_r)^2}; \quad Y_p = \frac{\omega^2 L_r}{R_r^2 + (\omega L_r)^2}$$

Kondensator und Widerstand

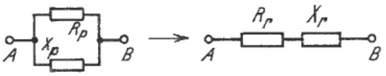


$$R_p = \frac{1 + (\omega C_r R_r)^2}{\omega^2 C_r^2 R_r}; \quad C_p = \frac{C_r}{1 + (\omega C_r R_r)^2}; \quad \mathrm{tg}\,\varphi_p = -\frac{1}{R_r \omega C_r}$$

$$G_p = \frac{\omega^2 C_r^2 R_r}{1 + (\omega C_r R_r)^2}; \quad Y_p = \frac{C_r}{1 + (\omega C_r R_r)^2}$$

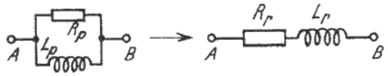
b. Umwandlung einer Parallelschaltung in eine Reihenschaltung

Allgemeiner Fall



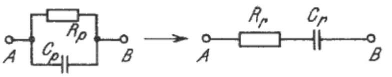
$$R_r = \frac{R_p X_p^2}{R_p^2 + X_p^2}; \quad X_r = \frac{R_p^2 X_p}{R_p^2 + X_p^2}; \quad \mathrm{tg}\,\varphi_r = \frac{R_p}{X_p}$$

Spule und Widerstand



$$R_r = \frac{R_p (\omega L_p)^2}{R_p^2 + (\omega L_p)^2}; \quad L_r = \frac{R_p^2 L_p}{R_p^2 + (\omega L_p)^2}; \quad \mathrm{tg}\,\varphi_r = \frac{R_p}{\omega L_p}$$

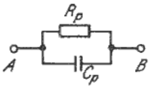
Kondensator und Widerstand

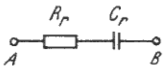


$$R_r = \frac{R_p}{1 + (\omega C_p R_p)^2}; \quad C_r = \frac{1 + (\omega C_p R_p)^2}{\omega^2 C_p R_p^2}; \quad \mathrm{tg}\varphi_r = -R_p \omega C_p$$

Bedeutung der Abkürzungen: R = ohmscher Widerstand, G = ohmscher Leitwert, X = Blindwiderstand, Y = Blindleitwert, Index r = Widerstandswert bei Reihenschaltung, Index p = Widerstandswert bei Parallelschaltung

c. Erläuterung der Formeln

Übergang von 

auf 

Reihenschaltung: $\Re_{ABr}$ = Widerstand zw. AB $= R_r + \frac{1}{j\omega C_r}$

Parallelschaltung: $\Re_{ABp}$ = Widerstand zw. AB $= \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\omega C_p}$

$$\Re_{ABp} = \frac{R_p (1 - R_p j \omega C_p)}{1 - R_p^2 j^2 \omega^2 C_p^2} = \frac{R_p}{1 + \omega^2 C_p^2 R_p^2} - \frac{j\omega C_p R_p^2}{1 + \omega^2 C_p^2 R_p^2}$$

Voraussetzungsgemäß soll sein $\Re_{ABr} = \Re_{ABp}$. Komplexe Größen sind aber dann einander gleich, wenn ihre Realteile und Imaginärteile einander gleich sind.

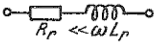
$$\Re_{ABr} = \underbrace{R_r}_{\text{Realteil}} + \underbrace{\frac{1}{j\omega C_r}}_{\text{Imaginärteil}} = \Re_{ABp} = \underbrace{\frac{R_p}{1 + \omega^2 C_p^2 R_p^2}}_{\text{Realteil}} - \underbrace{\frac{j\omega C_p R_p^2}{1 + \omega^2 C_p^2 R_p^2}}_{\text{Imaginärteil}}$$

$$R_r = \frac{R_p}{1 + \omega^2 C_p^2 R_p^2}$$

$$\frac{1}{j\omega C_r} = -\frac{j\omega C_p R_p^2}{1 + \omega^2 C_p^2 R_p^2}$$

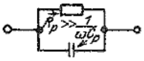
$$C_r = \frac{1 + \omega^2 C_p^2 R_p^2}{\omega^2 C_p R_p^2}$$

d. Spezielle Fälle

1. Spulenverluste klein; $R_r \ll \omega L_r$; 

Ist im Fall Spule und Widerstand $R_r \ll \omega L_r$, dann vereinfacht sich R_p und L_p zu:

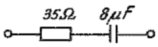
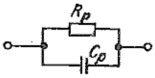
$$\boxed{R_p = \frac{(\omega L_r)^2}{R_r};\ L_p = L_r}$$

2. Kondensatorverlustwinkel klein; $R_p \gg \frac{1}{\omega C_p}$; 

Ist im Fall Kondensator mit parallelgeschaltetem Widerstand $R_p \gg \frac{1}{\omega C_p}$, dann vereinfacht sich R_r und C_r zu:

$$\boxed{R_r = \frac{1}{\omega^2 C_p{}^2 R_p};\ C_r = C_p}$$

e. Zahlenbeispiel

Umrechnung von  in 

(Diese Zahlenwerte sind auch der graphischen Konstruktion (Bild 2) zu Grunde gelegt).

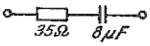
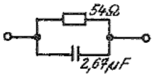
Meßfrequenz $f = 800\,\text{Hz}$, $\omega = 5000$, $C_r = 8\,\mu F$

$$X_r = \frac{1}{\omega C_r} = \frac{1}{5000 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = 25\,\Omega;\ R_r = 35\,\Omega$$

$$R_p = \frac{1 + (\omega C_r R_r)^2}{\omega^2 C_r{}^2 R_r} = \frac{1 + (5000 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 35)^2}{5000^2 \cdot 8^2 \cdot 10^{-12} \cdot 35} = \frac{3}{56 \cdot 10^{-3}} = 54\,\Omega$$

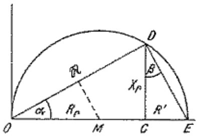
$$C_p = \frac{C_r}{1 + (\omega \cdot C_r \cdot R_r)^2} = \frac{8 \cdot 10^{-6}}{1 + (5000 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 35)^2} = \frac{8 \cdot 10^{-6}}{3} = 2{,}67\,\mu F$$

$$X_p = \frac{1}{\omega C_p} = \frac{1}{5000 \cdot 2{,}67 \cdot 10^{-6}} = 74{,}5\,\Omega$$

Also:  gleichwertig mit 

B. Umrechnung durch graphische Methode

a. Anwendung und Erläuterung des graphischen Verfahrens



(Vgl. Aa „Allgemeiner Fall")
Da der mit seinem Scheitel auf dem Halbkreis liegende Winkel

$\sphericalangle$ ODE = 90° ist, ist $\alpha = \beta$ und $\frac{X_r}{R_r} = \frac{R'}{X_r}$

Die Strecke $OE = R_r + R' = R_r + \frac{X_r^2}{R_r} = \frac{R_r^2 + X_r^2}{R_r}$

Für das Dreieck OCD gilt: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{X_r}{R_r}$

und für das Dreieck CDE: $\operatorname{tg}\beta = \frac{R'}{X_r}$

Das ist aber $= R_p$ nach der ersten Formel von Abschnitt Aa), und das bedeutet: Der Durchmesser des Kreises, dessen Mittelpunkt auf der reellen Achse (x-Achse) liegt, und der durch den Koordinatenanfangspunkt 0 und den Endpunkt von X_r (Punkt D) hindurchgeht, stellt den gesuchten Realteil der Parallelschaltung dar. Entsprechendes gilt für den Imaginärteil X_p.

b. Beispiele. Reihenschaltung in Parallelschaltung und umgekehrt

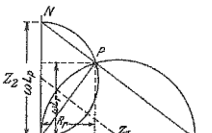


Bild 1. Ohmscher Widerstand und Induktivität (Vgl. Aa und Ab „Spule und Widerstand)

Nach Festlegung des Maßstabes cm/Ω trägt man auf der x-Achse R_r, und auf der y-Achse $X_r = \omega L_r$ ab. Man zeichne das Rechteck, dessen eine Seite durch R_r und dessen andere Seite durch ωL_r g ebildet wird. Die dem Koordinatenanfangspunkt 0 gegenüberliegende Rechteckspitze ist der Punkt P. Durch ihn zieht man eine Senkrechte zu OP. Diese schneidet die x-Achse in M, die y-Achse in N.

Es ist $\boxed{OM = R_p,\ ON = \omega L_p}$

Halbiert man OP und errichtet in diesem Halbierungspunkt das Lot auf OP nach beiden Seiten, so schneidet das die x-Achse im Punkt Z_1 und die y-Achse in Z_2. Z_1 ist der Mittelpunkt des Kreises über OM, Z_2 ist der Mittelpunkt des Kreises über ON. Beide Kreise müssen sich in P schneiden.

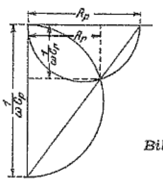


Bild 2. Ohmscher Widerstand und Kapazität. (Vgl. Zahlenbeispiel unter Ae)

c. Zwei Nomogramme zur Durchführung dieser Umrechnungen

Nomogramm 1

Umwandlung der Reihenschaltung zweier Widerstände in Parallelschaltung zweier Widerstände und umgekehrt.

Aus den gegebenen Widerstandswerten R_r und X_r ermittelt man den zugehörenden Punkt im Koordinatensystem. Die beiden durch diesen Punkt laufenden Kreise geben die gesuchten R_p- und X_p-Werte. Die Mittelpunkte der X_p-Kreise liegen auf der y-Achse, die Mittelpunkte der R_p-Kreise auf der x-Achse.

Zur Verbesserung der Übersichtlichkeit sind die Zahlenwerte der X_p-Kreise unterstrichen. Aus gleichem Grunde und zur Platzersparnis ist X_r vom Nullpunkt aus nur nach unten aufgetragen. Hier ist also nur mit dem Absolutbetrag der Blindwiderstände zu rechnen.

Erweiterung des Nomogramms. Durch Multiplikation aller 4 Größen (R_r, X_r, R_p, X_p) mit dem gleichen Faktor (z. B. 10) läßt sich das Nomogramm auch für andere als die angeschriebenen Widerstandswerte verwendbar machen.

Nomogramm 2

Umwandlung der Reihenschaltung zweier Widerstände in Parallelschaltung zweier Leitwerte und umgekehrt.

Aus den gegebenen Widerstandswerten R_r und X_r ermittelt man den zugehörenden Punkt im Koordinatensystem. Die beiden durch ihn laufenden Kreise geben die gesuchten G_p- und Y_p-Werte.

Die Mittelpunkte der G_p-Kreise liegen auf der x-Achse, die Mittelpunkte der Y_p-Kreise auf der y-Achse.

Die Zahlenwerte der Y_p-Kreise sind unterstrichen. Wie beim Nomogramm 1 ist der Blindwiderstand/-Leitwert nur nach einer Seite aufgetragen.

Erweiterung des Nomogramms. Das Nomogramm 2 läßt sich für andere als die angeschriebenen Zahlen verwendbar machen, wenn die Widerstandswerte (R_r, X_r) mit dem gleichen Faktor multipliziert, die Leitwerte (G_p, Y_p) durch den gleichen Faktor dividiert werden.

Beispiel:		
	$R_r = 12\ (\Omega)$	$R_r = 120\ (\Omega)$
	$X_r = 6\ (\Omega)$	$X_r = 60\ (\Omega)$
	gibt	gibt
	$G_p = 0{,}066\ (1/\Omega)$	$G_p = 0{,}0066\ (1/\Omega)$
	$Y_p = 0{,}033\ (1/\Omega)$	$Y_p = 0{,}0033\ (1/\Omega)$