Funktechnische Arbeitsblätter

DK 621.392.2.029.63/.64

Sk 81

2. Ausgabe

4 Blätter

Wellenwiderstand von Paralleldraht- und konzentrischen Leitungen

1. Anwendung dieser Leitungsformen

Sind im Gebiet der Tonfrequenz die Leitungslängen praktisch ohne Einfluß, so ist man mit steigender Frequenz, speziell aber in der KW- und UKW-Technik, gezwungen, die Leitungslängen soweit als technisch möglich zu verringern, denn jedes Leitungsstück besitzt eine Längsinduktivität und eine Querkapazität. Das heißt: mit steigender Frequenz werden der Scheinwiderstand in Leitungsrichtung und der Parallel-Leitwert immer höher. Ferner müssen die frequenzbestimmenden Elemente mit steigender Frequenz immer kleiner werden, sie kommen mit ihren Werten in die Größen der Zuleitungsinduktivität und -kapazität. Will man nun in diesem Gebiet arbeiten, so muß man sich eben die Tatsache der längs einer Leitung verteilten Induktivität und Kapazität zunutze machen.

Der Unterschied zwischen der Arbeitsweise bei langen und kurzen Wellen besteht also darin, daß bei den ersteren konzentrierte L- und C-Größen (sogenannter quasistationärer Fall) gebraucht werden, während im zweiten Fall als Resonanzgebilde Leitungsstücke mit ihren verteilten Induktivitäten und Kapazitäten dienen, sofern ihre räumliche Ausdehnung in der Größenordnung der elektrischen Wellenlänge liegt.

In der Kabeltechnik, in der ja auch sehr oft die Kabellänge in die Größe der zu übertragenden Welle kommt, ist es deshalb in gleicher Weise notwendig, mit den verteilten Induktivitäten und Kapazitäten zu rechnen.

2. Ersatzschaltbild einer solchen Leitung (Bild 1)

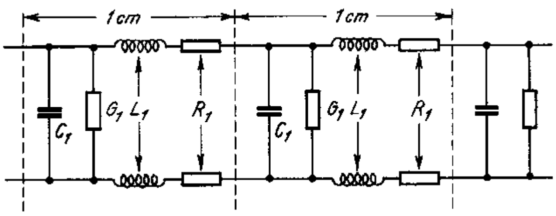


Bild 1. Ersatzschaltbild einer langen Leitung

R_1 = ohmscher Widerstand (Längswiderstand) in Ω/cm Länge der Doppelleitung.

G_1 = ohmscher Leitwert (Querleitwert) in Siemens/cm Länge der Doppelleitung.

L_1 = Selbstinduktion in H/cm Länge der Doppelleitung.

C_1 = Kapazität in F/cm Länge der Doppelleitung.

Fließt ein Strom durch ein Leitungsstück, so entsteht in seiner unmittelbaren Nähe ein elektrisches und magnetisches Feld. Bei niedrigen Frequenzen, d. h. bei quasistationärer Stromverteilung wird die zum Aufbau des Feldes benötigte Energie zurückgewonnen, wenn das Feld beim Zurückgehen der Amplitude abgebaut wird. Bei hohen Frequenzen wird ein elektromagnetisches Feld in den Raum abgestrahlt (Fernfeld). Es tritt von der Leitung her gesehen ein Leistungsverlust auf.

Der im Ersatzschaltbild eingezeichnete Widerstand R_1 deckt neben den Leitungsverlusten auch diese Strahlungsverluste.

3. Der Wellenwiderstand

Der charakteristische Wert einer Leitung, der Wellenwiderstand, stellt das Verhältnis Spannung : Strom für eine auf ihr fortschreitende Welle dar. Mit den angegebenen spezifischen Größen ist der Wellenwiderstand

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{R_1 + j\,\omega\,L_1}{G_1 + j\,\omega\,C_1}} = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}} \tag{1}$$

Für dämpfungsarme Leitungen ($R \approx 0$, $G \approx 0$) – wie bei fast allen praktisch vorkommenden Leitungen – wird

$$Z = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \frac{U}{I} \tag{2}$$

Eigenschaften des Wellenwiderstandes

a) Seine Größe ist nur von den Leitungsgrößen (R_1, G_1, L_1, C_1) und der Frequenz f bestimmt.

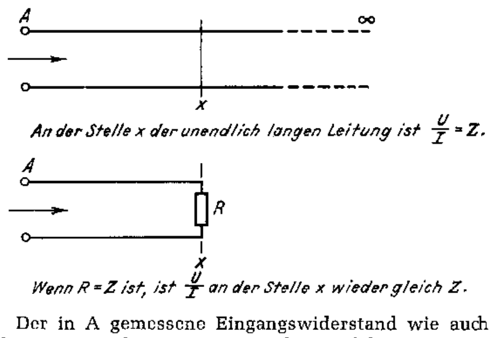
b) Unter Vernachlässigung der ohmschen Verluste auf der Leitung, das heißt unter der Voraussetzung $R_1 \ll \omega L_1$, $G_1 \ll \omega C_1$, ist er ein frequenzunabhängiger Wirkwiderstand.

c) Er bestimmt das Verhältnis Spannung : Strom für eine fortschreitende Welle an jeder beliebigen Stelle der Leitung.

d) Er bestimmt bei gegebener Eingangsspannung die längs der Leitung fortlaufende Energie.

e) Bei reflexionsfreiem Abschluß der Leitung ist der Eingangswiderstand der Leitung gleich dem Wellenwiderstand.

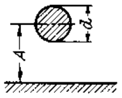
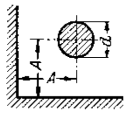
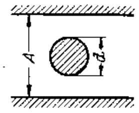
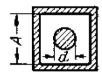
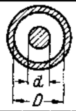
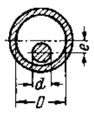
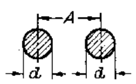
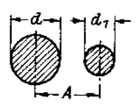
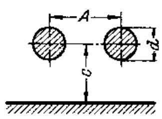
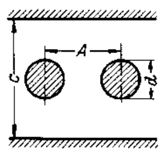
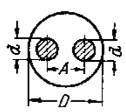
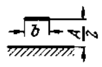
f) Nach (2) ist $Z = \frac{U}{I}$ an einer beliebigen Stelle einer reflexionsfreien, das heißt unendlich langen Leitung. Schneidet man an beliebiger Stelle die Leitung auf und schaltet an Stelle des abgeschnittenen Teils einen Widerstand $R = Z$ an, so benimmt sich das Anfangsstück der Leitung wieder wie eine unendlich lange Leitung, das heißt, sie ist durch den Widerstand $R = Z$ reflexionsfrei abgeschlossen (siehe Bild 2). Die gesamte zum Abschlußwiderstand laufende Energie wird von diesem absorbiert.



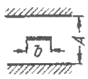
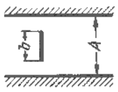
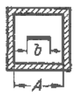
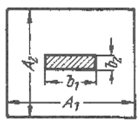
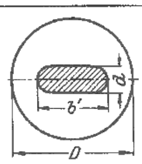
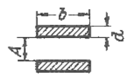
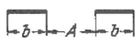
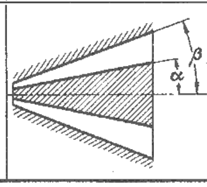
Der in A gemessene Eingangswiderstand wie auch die Strom- und Spannungsverteilung auf dem Leitungsstück von A bis X sind dann die gleichen wie bei unendlich langer Leitung.

Bild 2. Unendlich lange Leitung, ersetzt durch Leitung mit Abschlußwiderstand

Wellenwiderstand [$\mu = 1$ und $\varepsilon = 1$]

Leitungsbezeichnung	Leitungsform	Formel	Gültigkeitsbereich
Kreisförmiger Leiter über leitender Fläche		$Z = 60 \cdot \mathrm{ar\,cosh}\,\frac{2A}{d}$ [Ω] $Z = 138 \cdot \log \frac{4A}{d}$ [Ω]	[2] $A \gg d$ [4]
Kreisförmig. Leiter in einem zum rechten Winkel gebogenen Außenleiter		$Z = 138 \cdot \log 1{,}4\,\frac{2A}{d}$ [Ω]	$\frac{A}{d} > 1$ [2]
Kreisförmig. Leiter zwischen zwei parallelen Ebenen		$Z = 138 \cdot \log 1{,}27\,\frac{A}{d}$ [Ω]	$\frac{A}{d} > 2$ [2]
Innenleiter: Kreisquerschnitt Außenleiter: Quadratischer Querschnitt		$Z = 138 \cdot \log 1{,}08\,\frac{A}{d}$ [Ω]	$\frac{A}{d} > 2$ [2]
Konzentrische Leitung		$Z = 138 \cdot \log \frac{D}{d}$ [Ω]	
Exzentrische Rohrleitung		$Z = 60\,\mathrm{ar\,cosh}\,\frac{D^2 + d^2 - 4e^2}{2\,dD}$ [Ω] $Z = 138\left[\log\frac{D}{d} - 1{,}75\left(\frac{e}{D}\right)^2\right]$ [Ω]	$\frac{e}{D} < 0{,}3$
Paralleldrahtleitung		$Z = 120\,\mathrm{ar\,cosh}\,\frac{A}{d}$ [Ω] $Z = 276 \log\left(\frac{A}{d} + \sqrt{\frac{A^2}{d^2} - 1}\right)$ [Ω] $Z = 276 \log \frac{2A}{d}$ [Ω]	[2, 3] [2, 3] $\frac{A}{d} > 2{,}5$ [2]
Paralleldrahtleitung unsymmetrisch		$Z = 60\,\mathrm{ar\,cosh}\,\frac{4A^2 - d^2 - d_1^2}{2d\,d_1}$ [Ω]	
Paralleldrahtleitung über leitender Ebene (Leiter d im Gegentakt gespeist)		$Z = 120\left[\mathrm{ar\,cosh}\,\frac{A}{d} - \ln\sqrt{1 + \left(\frac{A}{2c}\right)^2}\right]$ [Ω] $Z = 276 \log \frac{2A}{d \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{A}{2c}\right)^2}}$ [Ω]	[2] $\frac{A}{d} > 3$ [3]
Paralleldrahtleitung zwischen zwei Ebenen (Leiter d im Gegentakt gespeist)		$Z = 276 \log \frac{\tanh 2\pi \cdot \frac{\sqrt{A^2 - d^2}}{4c}}{\frac{\pi \cdot d}{4c}}$ [Ω]	[5]
Paralleldrahtleitung im Abschirmrohr (Gegentakterregung)		$Z = 120\,\mathrm{ar\,cosh}\left(\frac{A}{d} \cdot \frac{D^2 - A^2 + d^2}{D^2 + A^2 - d^2}\right)$ [Ω] $Z = 276 \log\left(\frac{2A}{d} \cdot \frac{D^2 - A^2}{D^2 + A^2}\right)$ [Ω]	[2] $\frac{D}{d} > 4$ [2, 3]
Bandförmiger Leiter über einer Ebene		$Z = 138 \cdot \log 3{,}5\,\frac{A}{b}$ [Ω]	dünnes Band und $\frac{A}{b} > 2$ [2]

Wellenwiderstand ($\mu = 1$ und $\varepsilon = 1$)

Leitungsbezeichnung	Leitungsform	Formel	Gültigkeitsbereich
Bandförmiger Leiter zwischen zwei Ebenen		$Z = 138 \cdot \log 2{,}55 \cdot \frac{A}{b}$ [Ω] $Z = \frac{150}{0{,}69 + 1{,}6 \frac{b}{A}}$ [Ω]	dünnes Band und $\frac{A}{b} > 2$ [2, 3] dünnes Band und $\frac{A}{b} < 1$ [3]
Bandförmiger Leiter zwischen zwei Ebenen		$Z = 138 \log 2{,}25 \frac{A}{b}$ [Ω]	dünnes Band und $\frac{A}{b} > 2$ [2]
Bandförmiger Innenleiter Außenleiter: Quadratischer Querschnitt		$Z = 138 \cdot \log 2{,}16 \cdot \frac{A}{b}$ [Ω]	dünnes Band und $\frac{A}{b} > 2$ [2]
Bandförmiger Innenleiter Außenleiter: Kreisquerschnitt		$Z = 138 \cdot \log \frac{2D}{b}$ [Ω]	dünnes Band und $\frac{D}{b} > 2$ [2, 3]
Rechteckleiter in rechteckförmigem Außenleiter		$Z = 138 \log \frac{A_1 + A_2}{b_1 + b_2}$ [Ω]	[8]
Bandförmiger Innenleiter Außenleiter: Kreisquerschnitt		$Z = 138 \log \frac{2D}{b}$ [Ω] $b = b' + d$	[2, 8]
Symmetrische Parallelbandleitung		$Z = 30 \left(9{,}2 \log \left[1 + \frac{A}{b} \right] + 8 \frac{\frac{A}{b}}{1 + \frac{A}{b}} - 2 \left[\frac{\frac{A}{b}}{1 + \frac{A}{b}} \right]^2 \right)$ [Ω] $Z = 377 \cdot \frac{A}{A + b}$ [Ω]	$b \gg d$ dünnes Band und $\frac{A}{b} < 3$ [2]
Parallelbandleitung		$Z = \frac{257}{\log \left(4 + 8 \frac{b}{A} \right)}$ [Ω] $Z = 276 \log \left(4 + 4 \frac{A}{b} \right)$ [Ω]	$\frac{A}{b} < 1$ [3] $\frac{A}{b} > 1$ [1]
Koaxiale Kegelleitung		$Z = 138 \log \frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2}$ [Ω] $Z = 138 \log \frac{\beta}{\alpha}$ [Ω]	[2, 3] für kleine Kegelwinkel

4. Formeln und Diagramme für den Wellenwiderstand

In der vorhergehenden *Tabelle* sind die wichtigsten Berechnungsformeln für verschiedene Leitungsformen zusammengestellt. Die Diagramme *Bild 7...14* auf den folgenden Blättern zeigen die Wellenwiderstandswerte in Abhängigkeit von den Leitungsdimensionen für verschiedene Leitungsformen.

5. Der Einfluß des Dielektrikums auf die Größe des Wellenwiderstandes

Die Diagramme gelten zunächst sämtlich für Luft als Dielektrikum. Für ein Dielektrikum mit $\varepsilon > 1$ erhöht sich der Wert für die Kapazität/cm der Doppelleitung um den Faktor ε. Und die Gleichung für den Wellenwiderstand lautet dann

$$Z = \sqrt{\frac{L_1}{C_1 \cdot \varepsilon}}$$

C_1 = Kapazität für 1 cm Doppelleitung und $\varepsilon = 1$

6. Der Einfluß der Permeabilität auf die Größe des Wellenwiderstandes

Die Diagramme gelten für Materialien mit $\mu = 1$. Wird jedoch Eisen verwendet, also $\mu > 1$, dann erhöht sich die Induktivität/cm der Doppelleitung um den Faktor μ, und die Gleichung für den Wellenwiderstand lautet dann

$$Z = \sqrt{\frac{L_1 \cdot \mu}{C_1}}$$

L_1 = Induktivität für 1 cm Doppelleitung und $\mu = 1$

(Achtung! Frequenzabhängigkeit von μ berücksichtigen; also in die Formel für μ den Wert einsetzen, der dem Material im untersuchten Frequenzgebiet zukommt.)

7. Bestimmung von Z

a) Z kann gemäß der Formel $Z = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ ermittelt werden, indem man durch statische Messung den Wert für die Induktivität/cm und die Kapazität/cm feststellt.

b) Bei niedrigen Frequenzen kann man die Eingangsimpedanz des Kabels nach Betrag und Phase
   1. für am Ende offene ($\mathfrak{R}_L$)
   2. Für am Ende kurzgeschlossene Leitung ($\mathfrak{R}_K$)

messen. Dann ist der Wellenwiderstand Z gleich dem geometrischen Mittel dieser beiden Werte.

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{R}_L \cdot \mathfrak{R}_K}$$

c) Bis in das UKW-Gebiet hinein ist nach *Bild 3* noch folgende Methode anwendbar (siehe auch HFT und ELA 1930, Seite 122, H. O. Roosenstein):

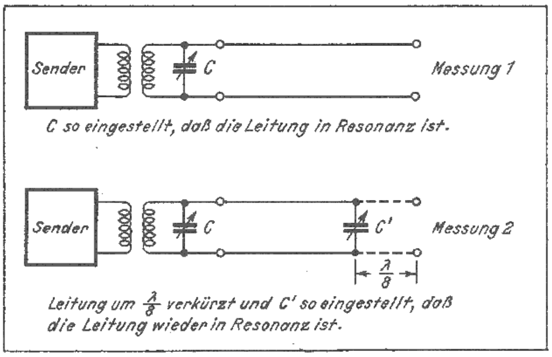


Bild 3. Ermittlung von Z

Aus diesen Messungen berechnet sich der Wellenwiderstand nach folgender Formel:

$$\boxed{Z = \frac{1}{\omega C'}}$$

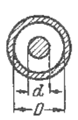
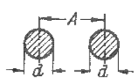
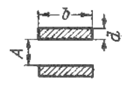
Z in Ω
$\omega = 2\pi f$; f in Hz
C' in F

d) Zur Bestimmung des Wellenwiderstandes im Dezimetergebiet benötigt man eine Meßleitung und das Leitungs-Kreisdiagramm. Angaben darüber siehe FtA, Mth 86, 87.

8. Schrifttum

[1] L. Ratheiser und H. Ruffler: Leitungen und Kreise bei ultrahohen Frequenzen, Telefunken-Bericht 1944.
[2] H. Meinke und F. W. Gundlach: Taschenbuch der Hochfrequenztechnik, Springer-Verlag Berlin 1956.
[3] G. Megla: Dezimeterwellentechnik, Fachbuchverlag Leipzig 1954.
[4] F. E. Terman: Radio Engineers' Handbook, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York 1943.
[5] K. S. Knol und M. I. O. Strutt, Physica, Haag 9 (1942), S. 577.
[6] Funktechnische Arbeitsblätter Kp 11.
[7] Funktechnische Arbeitsblätter Ind 11.
[8] Telefunken, Röhrenmitteilung für die Industrie 59 01 48.

Kapazität und Induktivität für ein Leitungsstück von 1 cm Länge [$\mu = 1$ und $\varepsilon = 1$]

Leitungsbezeichnung	Leitungsform	Formel	Gültigkeitsbereich
Konzentrische Leitung		$L_1 = 0{,}0046 \cdot \log \frac{D}{d} \left[\frac{\mu H}{cm}\right]$	[7]
		$C_1 = 0{,}241 \cdot \frac{1}{\log \frac{D}{d}} \left[\frac{pF}{cm}\right]$	[6]
Paralleldrahtleitung		$L_1 = 0{,}0092 \cdot \log \frac{2A}{d} \left[\frac{\mu H}{cm}\right]$	[7]
		$C_1 = 0{,}12 \cdot \frac{1}{\log \frac{2A}{d}} \left[\frac{pF}{cm}\right]$	[6]
Parallelbandleitung		$L_1 \approx 0{,}0125 \cdot \frac{A}{b} \left[\frac{\mu H}{cm}\right]$	$d \ll b$ [1]
		$C_1 \approx 0{,}0885 \cdot \frac{b}{A} \left[\frac{pF}{cm}\right]$	[1]