

**A. Unendlich lange oder mit dem Wellenwiderstand (Z) abgeschlossene Leitung**

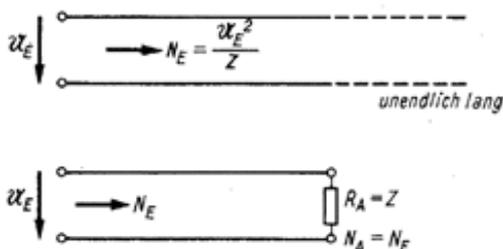


Bild 1. Die unendlich lange Leitung ist identisch mit einer Leitung, die mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen ist

Eine Leitung, auf der keine stehenden Wellen vorhanden sind, ist entweder unendlich lang oder mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen. Da in diesem Fall keine Reflexionen entstehen, muß die eingespeiste Leistung durch die Belastung bzw. den Dämpfungswiderstand der Leitung verbraucht werden. Auf einer solchen Leitung sind überall Strom und Spannung in Phase. Ferner ist an jeder Stelle, also auch an den Eingangsklemmen, der gleiche Quotient aus Spannung und Strom vorhanden. Er ist gleich dem Wellenwiderstand. Eine solche Leitung stellt also für den Generator eine rein ohmsche Belastung dar (Bild 1).

**B. Offene oder kurzgeschlossene Leitung**

Ihr Eingangswiderstand ist, unter der Annahme einer verlustlosen Leitung, ein Blindwiderstand. Er kann jeden beliebigen Wert zwischen Null und Unendlich annehmen. Da die eingespeiste Energie vom Abschlußwiderstand (siehe Abschnitt A) nicht aufgenommen wird, muß sie am Leitungsende reflektiert werden. Es bilden sich stehende Wellen.

**1. Bildung von stehenden Wellen**

Wie vorausgesetzt, ist die hier betrachtete Leitung weder unendlich lang noch mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen. Die eingespeiste Energie wird demzufolge am Leitungsende ganz oder teilweise reflektiert. Befindet sich am Leitungsende kein Leistungsverbraucher, d. h. kein ohmscher Widerstand, so wird die Energie voll reflektiert (Totalreflexion). Dieser Fall tritt eben dann auf, wenn die Leitung am Ende

- kurzgeschlossen,
- offen oder auch
- mit einem reinen Blindwiderstand abgeschlossen ist.

Durch die Überlagerung der hin- und rücklaufenden Welle bildet sich eine stehende Welle. Stehende Welle heißt:

Jeder quer zur Leitung gelegten Schnittstelle ist ein bestimmter Amplitudenwert zugeordnet. Spannung und Strom nehmen hier in Abhängigkeit von der Zeit alle Werte zwischen Null und dem zugehörigen Amplitudenwert an. Bei der fortlaufenden Welle dagegen schwingen Spannung und Strom an jedem Leitungspunkt zwischen Null und ihrem maximalen Amplitudenwert (Bild 2 und 3), denn bei der fortlaufenden Welle pflanzt sich jeder am Eingang angeregte Zustand längs der Leitung mit einer zeitlichen Verzögerung fort. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v = \lambda \cdot f$  ist von dem vorhandenen Dielektrikum abhängig.

Tastet man eine Leitung, auf der sich eine rein fortschreitende Welle ausbildet, also keinerlei Reflexion entsteht, mit einem Meßgleichrichter ab, so erhält man eine konstante Meßwertanzeige. Denn man ermittelt ja nicht den Augenblickswert der Spannung am jeweiligen Meßpunkt, sondern die Maximalamplitude (oder den Effektivwert). Diese ist aber über die ganze Leitungslänge konstant, verlustlose und angepaßte Leitung vorausgesetzt. Die Tatsache, daß sich die Erregungszustände am Leitungseingang zeitlich nacheinander (siehe Bild 2) über die Leitung fortpflanzen, ist nicht feststellbar.

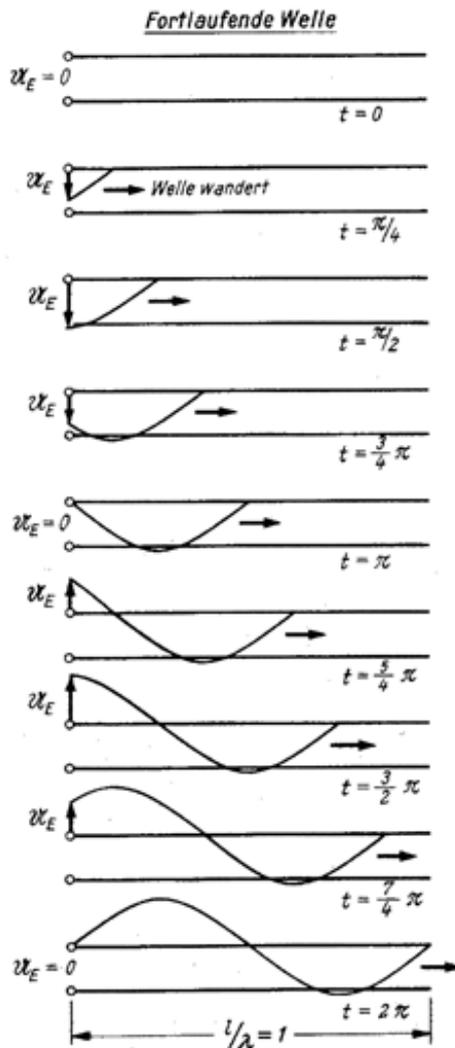


Bild 2. Momentbilder einer fortlaufenden Welle. Alle Punkte der Leitung nehmen nacheinander jeden Wert zwischen Null und der Amplitude der Welle an

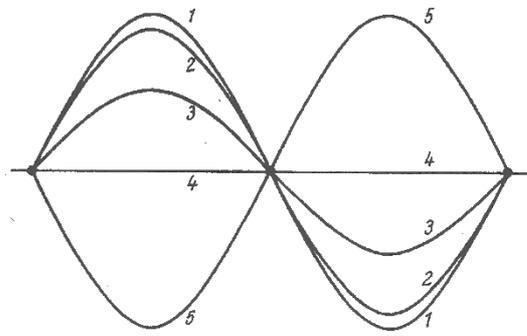
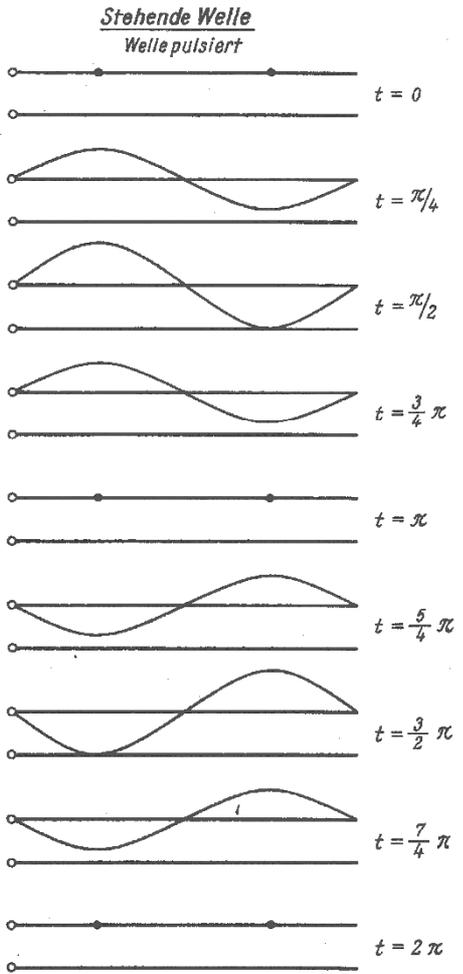


Bild 3a. Die übereinandergezeichneten Momentbilder der stehenden Welle lassen die Schwingungsknoten und -Bäuche erkennen. Die Schwingung pendelt nur zwischen Null und dem für den betreffenden Leitungspunkt möglichen Amplitudenwert

Die Bildung einer stehenden Welle aus hin- und zurücklaufendem Kurvenzug sei an zwei Bildern (Bild 4 und 5) gezeigt. Betrachtet sei eine am Ende offene Leitung. Dann gilt für Spannungs- und Stromverlauf folgendes:

Die an das Leitungsende gelangende fortlaufende Spannungswelle wird dort mit der gleichen Phase reflektiert. Die reflektierte Spannungswelle beginnt also mit dem gleichen Amplitudenwert und der gleichen Phasenlage, wie sie die hinlaufende Welle an dieser Stelle hat.

Dagegen ergibt sich für die rücklaufende Stromwelle eine Phasenverschiebung gegen die hinlaufende Stromwelle; denn voraussetzungsgemäß soll die Leitung am Ende offen sein. Hier kann kein Strom fließen. Um diese Forderung zu erfüllen, muß die rücklaufende Stromwelle am Leitungsende zwar den gleichen Amplitudenwert, aber die umgekehrte Phasenlage wie die hinlaufende Welle haben.

Hin- und rücklaufende Stromwelle addiert, ergeben dann wie verlangt am Leitungsende für die Stromamplitude den Wert Null.

Bild 4 bringt den Verlauf der Spannungswelle. Bild 5 den der Stromwelle. Wie gezeigt, setzt sich die stehende Welle aus zwei Kurvenzügen zusammen, der hinlaufenden und der mit gleicher Amplitude rücklaufenden Welle. Wenn für die hinlaufende Welle gilt:

$$A_1 = A_0 \cdot \cos(\omega t - 2\pi l/\lambda)$$

$$A_1 = \text{reelle Amplitude am Meßort}$$

so muß für die rücklaufende Welle geschrieben werden:

$$A_2 = A_0 \cdot \cos(\omega t + 2\pi l/\lambda).$$

Dann lautet die Summe:

$$A_1 + A_2 = 2 A_0 \cdot \cos 2\pi l/\lambda \cdot \cos \omega t.$$

Die Gleichung drückt das bereits über die stehenden Wellen gesagte aus: Die Amplitude ist gleich dem doppelten Wert der Amplitude eines Wellenzuges.

An allen Stellen der Leitung wird der mögliche Maximalwert gleichzeitig (wenn  $\cos \omega t = 1$ ) erreicht.

Die räumliche Lage der Stellen größter Amplitude ist durch  $\cos 2\pi l/\lambda = 1$  gegeben, d. h. sie liegen im Abstand  $l = \lambda/2$  voneinander.

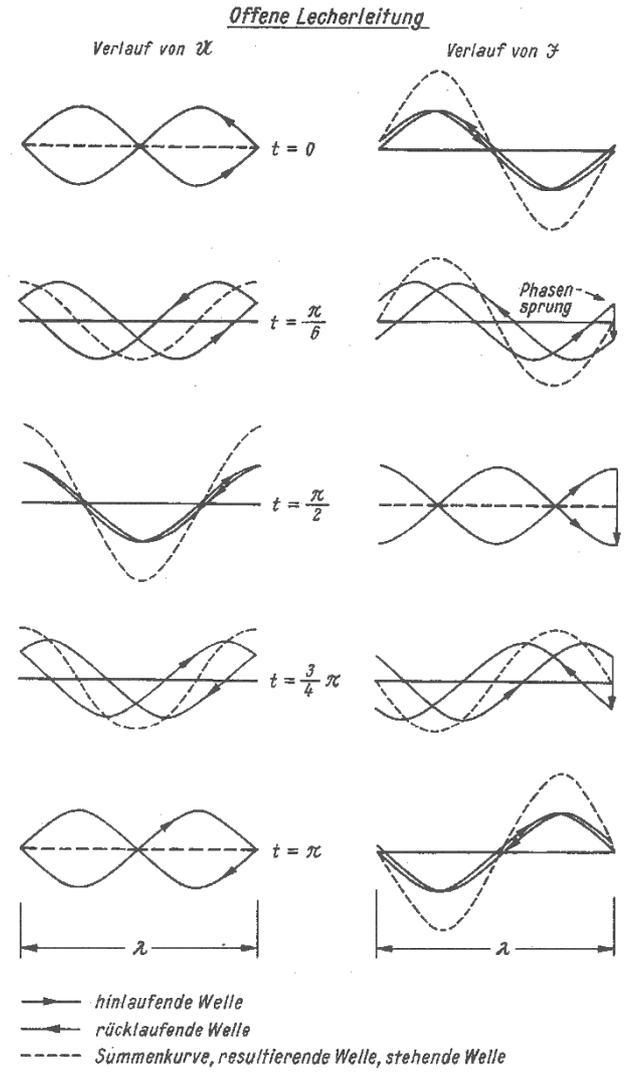


Bild 4. Bildung der stehenden Welle aus hin- und rücklaufender Welle - Verlauf von  $\mathcal{U}$  bei offener Lecherleitung

Bild 5. Bildung der stehenden Welle aus hin- und rücklaufender Welle - Verlauf von  $\mathcal{I}$  bei offener Lecherleitung

Regeln für stehende Wellen

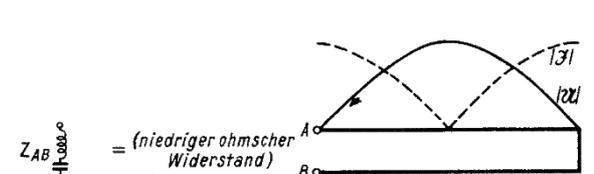
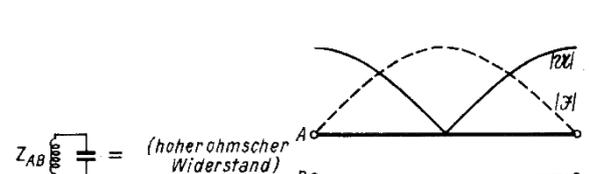
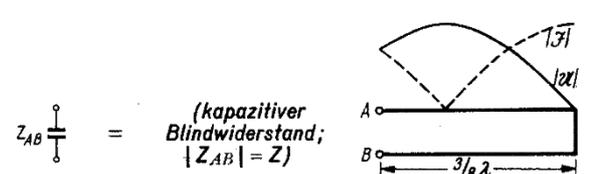
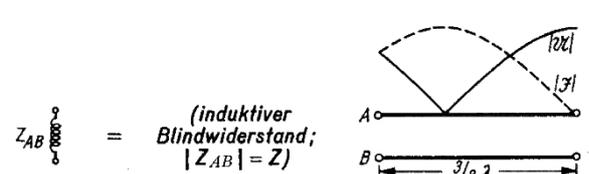
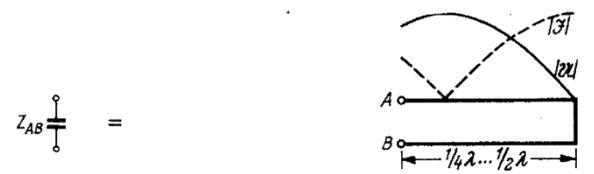
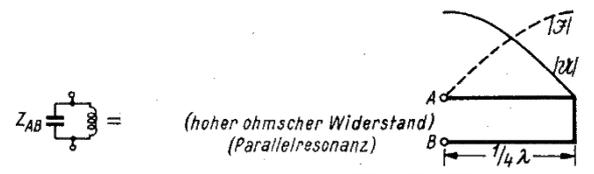
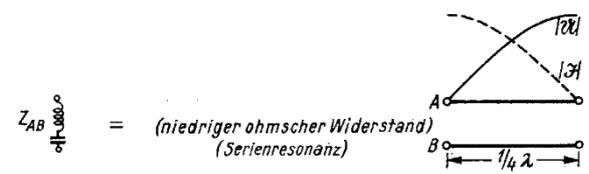
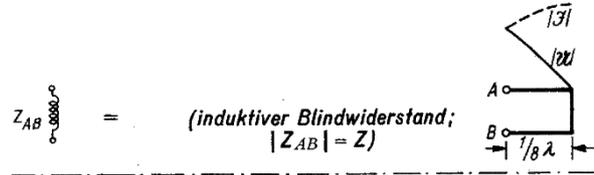
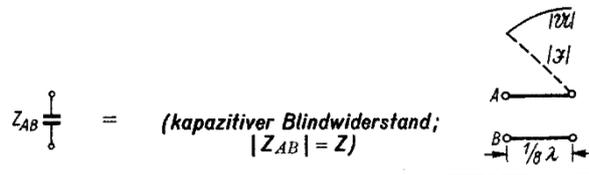


Bild 6. Der Eingangswiderstand der offenen Leitung bei verschiedenen Längen; die Leitung wirkt als kapazitiver oder induktiver Blindwiderstand oder als Resonanzkreis entsprechend der folgenden Aufstellung:

Bild 7. Der Eingangswiderstand der kurzgeschlossenen Leitung bei verschiedenen Längen; die Leitung wirkt als kapazitiver oder induktiver Blindwiderstand oder als Resonanzkreis entsprechend der folgenden Aufstellung:

kapaz. Blindwiderstand	Betrag des kapaz. Blindwiderstandes = Z	indukt. Blindwiderstand	Betrag des indukt. Blindwiderstandes = Z	Serienresonanz	Parallelresonanz
$0 \dots 1/4 \lambda$	$1/8 \lambda$			$1/4 \lambda$	
		$1/4 \dots 1/2 \lambda$	$3/8 \lambda$		$1/2 \lambda$
$1/2 \dots 3/4 \lambda$	$5/8 \lambda$			$3/4 \lambda$	
		$3/4 \dots \lambda$	$7/8 \lambda$		$\lambda$
$\lambda \dots 5/4 \lambda$	$9/8 \lambda$			$5/4 \lambda$	
		$5/4 \lambda \dots 3/2 \lambda$	$11/8 \lambda$		$3/2 \lambda$

kapaz. Blindwiderstand	Betrag des kapaz. Blindwiderstandes = Z	indukt. Blindwiderstand	Betrag des indukt. Blindwiderstandes = Z	Serienresonanz	Parallelresonanz
		$0 \dots 1/4 \lambda$	$1/8 \lambda$		$1/4 \lambda$
$1/4 \dots 1/2 \lambda$	$3/8 \lambda$			$1/2 \lambda$	
		$1/2 \dots 3/4 \lambda$	$5/8 \lambda$		$3/4 \lambda$
$3/4 \dots \lambda$	$7/8 \lambda$			$\lambda$	
		$\lambda \dots 5/4 \lambda$	$9/8 \lambda$		$5/4 \lambda$
$5/4 \dots 3/2 \lambda$	$11/8 \lambda$			$3/2 \lambda$	

2. Regeln für stehende Wellen

Für die stehende Welle gilt allgemein, wie auch teilweise die Bilder 4 und 5 zeigen, folgendes:

- a) Spannung (Strom) an jeder beliebigen Leitungsstelle setzen sich aus der Spannung (Strom) der hinlaufenden und Spannung (Strom) der rücklaufenden Welle zusammen.
- b) Am offenen Leitungsende wird die Spannungswelle mit gleicher Phase, die Stromwelle mit entgegengesetzter Phase reflektiert.
- c) Am kurzgeschlossenen Leitungsende wird die Spannungswelle mit entgegengesetzter Phase (damit sich  $U$  zu Null ergibt) und die Stromwelle mit gleicher Phase reflektiert.
- d) Die Punkte größter Spannungs- und größter Stromamplitude liegen um  $\lambda/4$  auseinander.
- e) An einem (betrachteten) Leitungsquerschnitt ändert sich zeitlich die Amplitude zwischen Null und einem für diese Stelle geltenden Maximalwert.
- f) Diese Maximalwerte bzw. Nullwerte werden für die Strom- und Spannungswelle nicht gleichzeitig erreicht. Sie liegen vielmehr zeitlich um  $\pi/2 = 90^\circ$  auseinander (reine Blindbelastung, Totalreflexion am Leitungsende vorausgesetzt).
- g) Aus den am Leitungseingang vorhandenen Spannungs- und Stromwerten berechnet sich der Eingangswiderstand nach Betrag und Phase.
- h) Je nach dem Verhältnis  $l/\lambda$  (d. h. Länge des betrachteten Leitungsstücks zur Wellenlänge der eingespeisten Spannung) ändert sich die Eingangsimpedanz.

In den Bildern 6 und 7 ist für offene und kurzgeschlossene Leitung der Eingangswiderstand in Abhängigkeit von  $l/\lambda$  angegeben. Man sieht, daß ein solches Leitungsstück sich ähnlich wie ein Resonanzkreis verhält. Im Resonanzfall ist der Eingangswiderstand oder Ersatzwiderstand 0 oder  $\infty$ , außerhalb der Resonanzfrequenz ergibt sich ein kapazitiver oder induktiver Blindwiderstand.

In Bild 6 ist ein am Ende offenes Leitungsstück betrachtet. Wie schon erwähnt, ist vorausgesetzt, daß es verlustfrei sei. Das Bild zeigt für die verschiedenen Leitungslängen die relative Strom- und Spannungsverteilung und gibt außerdem an, welchen Widerstand der das Leitungsstück speisende Generator „sieht“.

Bei allen ungeradzahigen Vielfachen von  $\lambda/4$  – vom Ende gemessen – hat der Strom ein Maximum, die Spannung ein Minimum. Die Leitung wirkt wie ein Serienresonanzkreis, der Eingangswiderstand ist, wenn, wie angenommen, die Verluste vernachlässigt werden, gleich Null.

Bei allen geradzahigen Vielfachen von  $\lambda/4$  hat an den Eingangsklemmen die Spannung ein Maximum, der Strom ein Minimum, die Leitung stellt einen Parallelresonanzkreis dar,

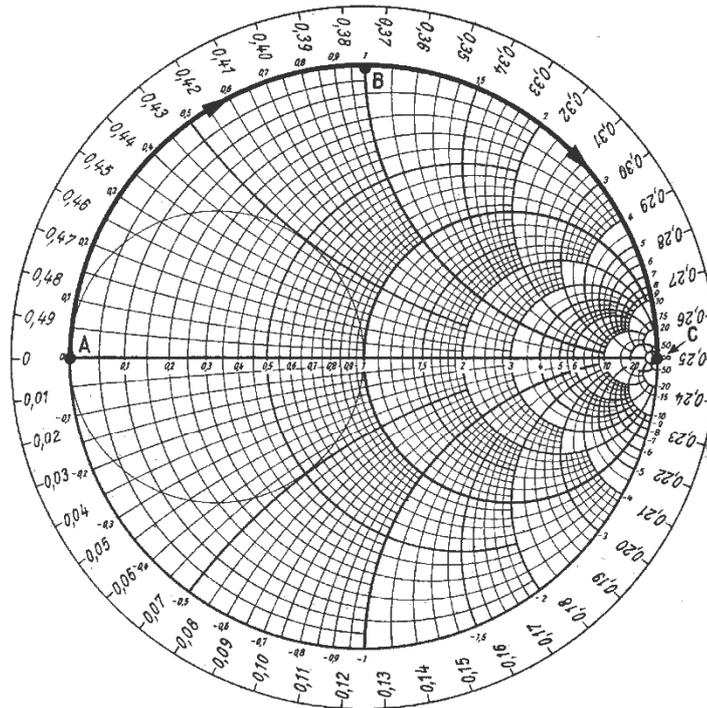


Bild 8. Die Änderung des Eingangswiderstandes einer kurzgeschlossenen Leitung bei Änderung der Leitungslänge - abgelesen im Kreisdiagramm Punkt A am Leitungsende Punkt B im Abstand  $l = \lambda/8$  vom Leitungsende Punkt C im Abstand  $l = \lambda/4$  vom Leitungsende

der Eingangswiderstand ist unendlich groß. Zwischen diesen ausgezeichneten Punkten wirkt die Leitung als Kapazität oder Induktivität, und zwar entsprechend der

Tabelle in der Unterschrift zu Bild 6.

In den Punkten  $1/8, 3/8, 5/8, 7/8 \lambda$  usw. hat der kapazitive oder induktive Blindwiderstand jeweils den Betrag des Wellenwiderstandes der Leitung.

Bild 7 zeigt analog zu Bild 6 die Verhältnisse für eine kurzgeschlossene (verlustfreie) Leitung.

Bei allen ungeradzahigen Vielfachen von  $\lambda/4$  ist an den Eingangsklemmen die Spannung hoch, der Strom klein. Die Leitung repräsentiert einen Parallel-Resonanzkreis. Bei allen geradzahigen Vielfachen ist die Spannung ein Minimum, der Strom ein Maximum. Die Leitung entspricht einem Serienresonanzkreis.

Für die übrigen Leitungslängen ergibt sich ein induktiver oder kapazitiver Blindwiderstand, und zwar entsprechend der Tabelle in der Unterschrift zu Bild 7.

An den Stellen  $1/8, 3/8, 5/8, 7/8 \lambda$  usw. hat der induktive oder kapazitive Blindwiderstand den Betrag des Wellenwiderstandes (Z). Vgl. hierzu Funktechnische Arbeitsblätter Mth 86, Bild 8. Dort ist über  $l/\lambda$  der normierte Eingangswiderstand

$\frac{X_E}{Z}$  für offene und kurzgeschlossene Leitung aufgetragen.

Die Entstehung dieser Kurven ergibt sich aus dem Kreisdiagramm (siehe Funktechnische Arbeitsblätter Mth 87/89). In Bild 8 ist als Beispiel eine kurzgeschlossene Leitung gewählt. Es ist also

$$\left. \begin{matrix} R_A = 0 \\ X_A = 0 \end{matrix} \right\} \text{demnach} \begin{matrix} R_{A/Z} = R'_A = 0 \\ X_{A/Z} = X'_A = 0 \end{matrix}$$

Der Punkt A liegt auf dem Kreis für konstanten Realteil  $= 0$  und konstanten Imaginärteil  $= 0$ . Schaltet man nun vor diesen Kurzschluß Leitungsstücke verschiedener Länge, so sieht man:

bei  $l/\lambda = 0,125$   
(d. h.  $l = \lambda/8$ ), Punkt B ist  $R'_E = 0, X'_E = 1, X_E = Z$

bei  $l/\lambda = 0,25$   
(d. h.  $l = \lambda/4$ ), Punkt C ist  $R'_E = \infty, X'_E = 0, R_E = \infty, X_E = 0$  usw.

**C. Leitung mit reellem Abschlußwiderstand größer oder kleiner als der Wellenwiderstand**

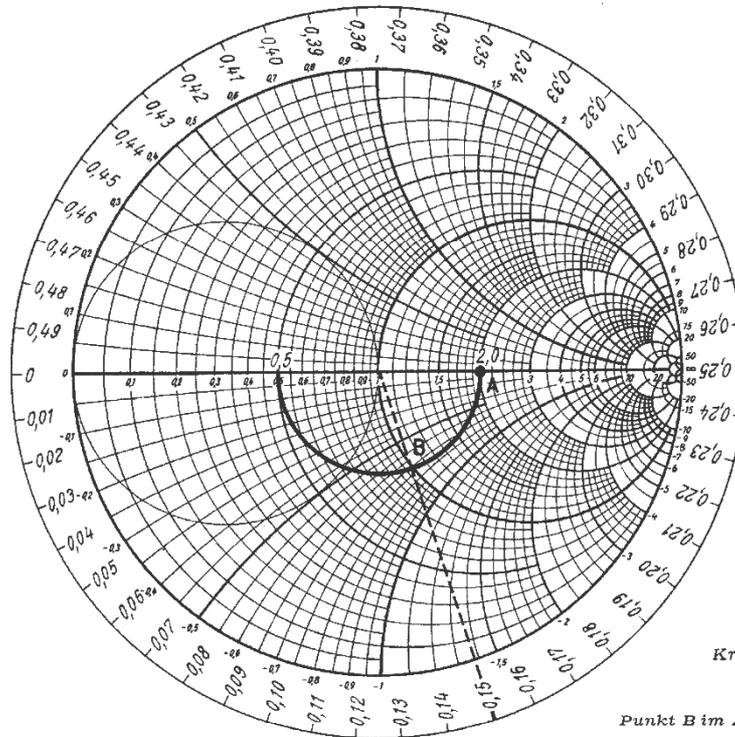


Bild 9. Bestimmung des Eingangswiderstandes aus dem Kreisdiagramm für eine fehlgepaßte Leitung  
 Punkt A am Leitungsende  
 Punkt B im Abstand 0,1 l vom Leitungsende

Ist der Abschlußwiderstand  $R_A$  vom Wellenwiderstand verschieden, so wird nur ein Teil der ankommenden Leistung in  $R_A$  verbraucht, der Rest wird reflektiert. Es muß sich also ein Zustand auf der Leitung ergeben, der zwischen dem in Abschnitt A –

- abgeschlossene Leitung,
- keine Reflexion,
- keine stehende Welle

und in Abschnitt B –

- kurzgeschlossene oder offene Leitung,
- volle Reflexion (Totalreflexion),
- stehende Welle,
- im Knoten Spannung und Strom = 0

geschilderten liegen muß.

In diesem Fall ( $0 < R_A < \infty$ ) ergeben sich auch stehende Wellen, es erfolgt eine Teilreflexion, aber Spannung und Strom in den Knoten sind  $> 0$ , ferner ist die Phasenverschiebung (zeitlich) zwischen Strom- und Spannungswelle  $< 90^\circ$ .

Dagegen haben (räumlich) Bauch und Knoten einen Abstand von  $\lambda/4$ .

Die sich einstellende Strom- und Spannungsverteilung kann mit Hilfe des Kreisdiagramms ermittelt werden. Für ein sol-

ches Beispiel sei  $R_A = 2 Z$ , d. h.  $R_A' = \frac{R_A}{Z} = 2$  und  $Z = 70 \Omega$

angenommen (Bild 9). Da die Blindkomponente Null ist, liegt der geometrische Ort (A) für den Abschlußwiderstand auf dem Schnittpunkt des horizontalen Durchmessers mit dem Kreis für konstanten Realteil = 2. Schaltet man ein Leitungsstück  $l/\lambda = 0,1$  vor, so erhält man Punkt B. Er liegt auf dem R-Kreis = 1 und X-Kreis = 0,7

Demzufolge ist

$$R_E = 1 \cdot 70 = 70 \Omega$$

$$X_E = -j \cdot 0,7 \cdot 70 = -j 49 \Omega$$

und

$$|X_E| = 1,22 \cdot 70 = 85,4 \Omega$$

Für die Spannungs- und Stromamplituden gilt:

$$\frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{G_2}{G_1}} \quad \text{und} \quad \frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

d. h. die Spannungsamplituden verhalten sich wie die Wurzeln aus den Wirkleitwerten an der betreffenden Leitungsstelle. Die Stromamplituden verhalten sich wie die Wurzeln der Wirkwiderstände. Setzt man also Strom und Spannung z. B. an  $R_A$  als bekannt voraus, so läßt sich die Spannungs- und Stromverteilung längs der Leitung berechnen. Für das hier gewählte Beispiel erhält man eine relative Verteilung wie in Bild 10 angegeben.

Ist  $R_A > Z$ , dann liegt an  $R_A$  ein Spannungsbauch und ein Stromknoten.

Ist  $R_A < Z$ , dann liegt an  $R_A$  ein Spannungs-knoten und ein Strombauch.

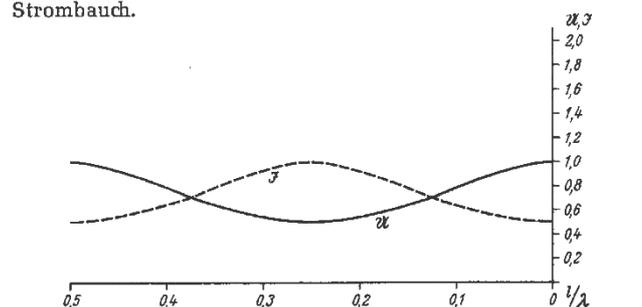


Bild 10. Spannungs- und Stromverteilung auf einer fehlgepaßten Leitung

D. Leitung mit Blindwiderstand abgeschlossen

Nach Abschnitt B kann jeder beliebige Blindwiderstand durch ein am Ende offenes oder kurzgeschlossenes Leitungsstück dargestellt werden. Man kann also einen am Leitungsende vorhandenen Blindwiderstand durch ein entsprechendes Leitungsstück ersetzen, Bild 11. Zum gleichen Ergebnis kommt man natürlich auch bei Betrachtung im Kreisdiagramm (Bild 12).

Geht man von einer kurzgeschlossenen Leitung aus, so muß man ein Leitungsstück  $l/\lambda = 0,5$  durchlaufen, um wieder auf einen Spannungsknoten zu kommen. Im Kreisdiagramm läuft man also auf dem Kreis für konstanten Realteil  $= 0$  (Begrenzungskreis) vom Punkt A um den ganzen Kreis herum bis wieder zu Punkt A, vgl. hierzu Bild 11.

Schaltet man an das Ende einen induktiven Blindwiderstand  $X_A = 280 \Omega$ , d. h.  $X'_A = \frac{X_A}{Z} = 4$  (Z zu  $70 \Omega$  angenommen, Punkt B), so muß man nur noch ein Leitungsstück von  $l/\lambda = 0,29$  durchlaufen, um wieder in den Spannungsknoten (Punkt A) zu kommen; vgl. hierzu Bild 11. Wird die Leitung mit einer Kapazität belastet ( $X_A = -j \cdot 140 \Omega$ , d. h.  $X'_A = -2$ ,

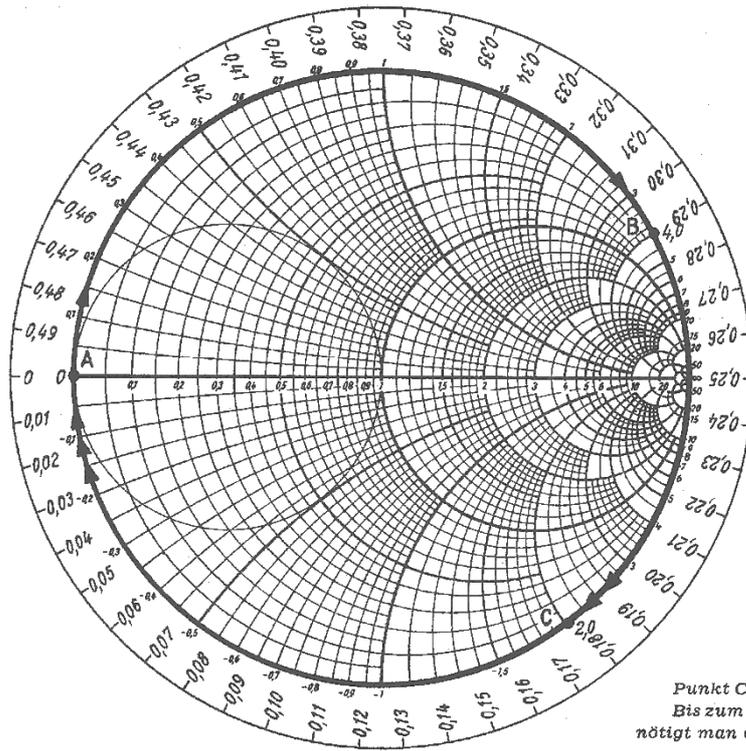


Bild 12. Die Belastungsfälle von Bild 11, dargestellt im Kreisdiagramm: Punkt A: Widerstand gleich Null am kurzgeschlossenen Leitungsende. Bis zum nächsten Spannungsknoten ist der volle Kreis von A bis A =  $0,5 \lambda$  zu durchlaufen. Punkt B: Induktiver Blindwiderstand. Es ist die Leitungslänge  $l/\lambda = 0,29$  vorzuschalten, um zum Punkt A zu kommen. Punkt C: Kapazitiver Blindwiderstand. Bis zum nächsten Spannungsknoten benötigt man ein Leitungsstück von  $l/\lambda = 0,175$

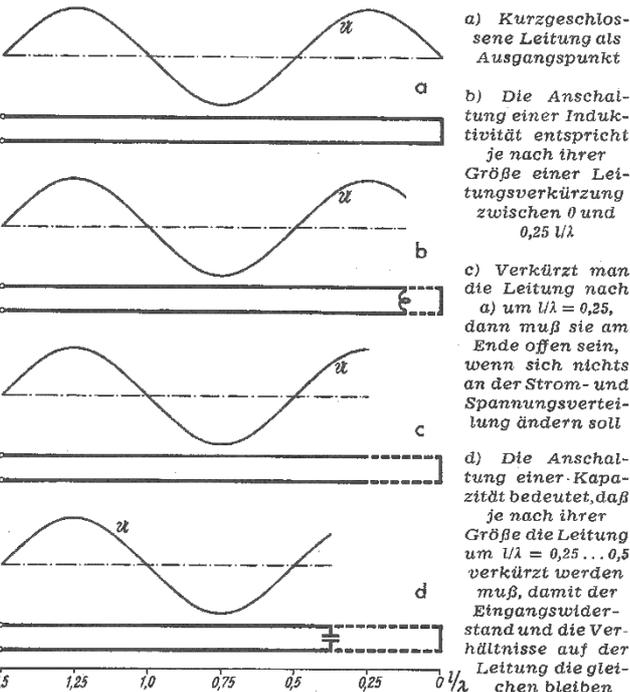


Bild 11. Ersatz eines Leitungsstückes durch einen Blindwiderstand

Punkt C), dann ist noch ein Leitungsstück von  $l/\lambda = 0,177$  bis zu Punkt A, d. h. bis zum Spannungsknoten erforderlich.

E. Zusammenfassung

1. Längs einer Lecherleitung pflanzt sich die Energie durch eine fortlaufende elektromagnetische Welle fort.
2. Infolge der Verluste durch Strahlung, Längswiderstand der Leiter und Querwiderstand im Dielektrikum, nimmt die Energie der Welle längs der Leitung exponentiell ab. Bei den hier betrachteten relativ kurzen Leitungsstücken können die Verluste vernachlässigt werden.
3. Ist die Leitung unendlich lang oder ist der Abschlußwiderstand gleich dem Wellenwiderstand, so wird die am Eingang zugeführte Leistung völlig von der Leitung oder vom Abschlußwiderstand verbraucht.
4. Weicht der Abschlußwiderstand vom Wellenwiderstand ab, so wird dort nur ein Teil der zugeführten Leistung verbraucht. Der Rest wird reflektiert.
5. Bei einer verlustlosen und mit dem Wellenwiderstand abgeschlossenen Leitung sind Strom und Spannung in Phase.
6. Wird bei Fehlanpassung am Abschlußwiderstand Leistung reflektiert, so treten stehende Wellen auf (Teilreflexion).
7. Bei offenen, kurzgeschlossenen oder mit einem Blindwiderstand abgeschlossenen Leitungen entsteht Totalreflexion.
8. Durch die Reflexion am Leitungsende ergibt sich eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. Der Eingangswiderstand ist dann nicht mehr ohmisch, sondern komplex.
9. Bei offener, kurzgeschlossener oder mit einem Blindwiderstand abgeschlossener Leitung ist der Eingangswiderstand ein Blindwiderstand.
10. Bei Anschließung eines Blindwiderstandes am Leitungsende tritt eine Änderung in der Strom- und Spannungsverteilung ein. Will man die ursprüngliche - vor Anschließung vorhandene - wieder herstellen, muß die Leitung verkürzt oder verlängert werden.
11. Mit dem Kreisdiagramm läßt sich der Eingangswiderstand jeder Leitung (belastet oder unbelastet) nach Betrag und Phase feststellen.